ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗΣ

Λίνας Χαραλαμποπούλου , Κώστα Βακαλόπουλου

Αντικείμενο αυτού του άρθρου είναι η εύρεση της εξίσωσης της εφαπτομένης σε δοσμένο ή μη σημείο της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης.

Πιστεύουμε ότι η λεπτομερής ανάπτυξη του θέματος μέσα από παραδείγματα θα βοηθήσει την καλύτερη κατανόησή του.

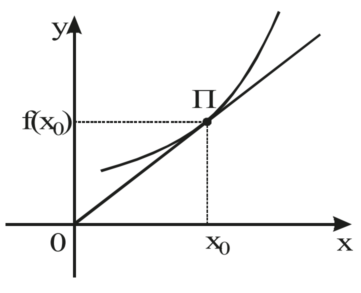
ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΕΡΜΗΝΕΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Έστω συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$, και $A(x_0,f(x_0))$ σημείο της γραφικής της παράστασης (C_f).

Αν η f παραγωγίζεται στο x_0, δηλαδή αν υπάρχει το όριο: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\ell\in\mathbb{R}$ τότε το όριο αυτό (που ονομάζεται παράγωγος της *f* στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$) είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης στη γραφική παράσταση της συνάρτησης στο σημείο Α.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Α είναι: $\boxed{y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)}$ (1)

(όπου $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ *δηλαδή η παράγωγος της f στο* x_0*)((σχήμα 1)*



σχήμα 1

Παράδειγμα

Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με τύπο $f(x)=2x^2-3$ στο σημείο της $A(1,-1)$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=4x$. Άρα $f'(1)=4$. Τότε η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο Α είναι: $y-f(1)=f'(1)(x-1)$ ή $y+1=4(x-1)$ ή $y=4x-5$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1:

Ζητείται να βρεθεί η εξίσωσης της εφαπτομένης της C_f που διέρχεται από το σημείο $K(\alpha,\beta)$ το οποίο δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f.

Έστω συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ που είναι συνεχής.

Έστω $A(x_0,f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εξίσωσης της εφαπτόμενης της C_f στο Μ είναι $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ (1). Η εξίσωση αυτή προφανώς επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου Μ, άρα: $\beta-f(x_0)=f'(x_0)(\alpha-x_0)$ (2). Από τη σχέση (2) υπολογίζουμε το x_0 και αντικαθιστούμε την τιμή της στην (1).

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^3$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το σημείο $A(0,-16)$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=3x^2$. Το σημείο Α προφανώς δεν ανήκει στη γραφική παράσταση της f. Αν $M(x_0,f(x_0))$ είναι το σημείο επαφής, τότε η εξίσωση της εφαπτομένης στο Μ είναι η $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ ή $y-x_0^3=3x_0^2(x-x_0)$ (1).

Η (1) επαληθεύεται από τις συντεταγμένες του σημείου Μ άρα: $-16-x_0^3=3x_0^2(0-x_0)\Leftrightarrow -16-x_0^3=-3x_0^3\Leftrightarrow x_0=2$. Άρα η εξίσωση της ζητούμενης εφαπτομένης είναι η $y-f(2)=f'(2)(x-2)\Leftrightarrow y-8=12(x-2)\Leftrightarrow y=12x-16$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Ι) Ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f που είναι παράλληλη σε γνωστή ευθεία (ε_1). Αυτό σημαίνει ότι η εφαπτόμενη (ε) της C_f και η ευθεία (ε_1) έχουν ίδιους συντελεστές διεύθυνσης $\lambda_\varepsilon, \lambda_{\varepsilon_1}$ αντίστοιχα. Άρα θα ισχύει: $\lambda_\varepsilon=\lambda_{\varepsilon_1}$, Όμως $\lambda_\varepsilon=f'(x_0)$. Όπου $(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της (ε) με την C_f ***άρα $f'(x_0)=\lambda_{\varepsilon_1}$ (1) Από την σχέση (1) υπολογίζουμε το x_0 και αντικαθιστούμε την τιμή του στην εξίσωση της (ε).***

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση f με τύπο $f(x)=x^2$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι παράλληλη στην $y=x+1$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=2x$. Αν η ζητούμενη ευθεία εφάπτεται της C_f στο $(x_0,f(x_0))$ τότε θα ισχύει $f'(x_0)=1\Leftrightarrow 2x_0=1\Leftrightarrow x_0=\frac{1}{2}$. Άρα η ζητούμενη ευθεία είναι η $y-f\left(\frac{1}{2}\right)=f'\left(\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ ή $y-\frac{1}{4}=x-\frac{1}{2}$ ή $y=x-\frac{1}{4}$.

Ειδική περίπτωση:

Αν ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f που είναι παράλληλη στον άξονα x΄x τότε απαιτούμε: $f'(x_0)=0$ (όπου (x_0,y_0) το σημείο επαφής).

ΙΙ) Ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της C_f που είναι κάθετη προς γνωστή ευθεία (ε_1) με $\lambda_{\varepsilon_1}\neq 0$. Αυτό σημαίνει ότι $\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_{\varepsilon_1}=-1$, δηλαδή $f'(x_0)\cdot\lambda_{\varepsilon_1}=-1$ (2). Από τη σχέση (2) υπολογίζουμε το x_0 και αντικαθιστούμε την τιμή του στην εξίσωση της (ε).

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση $f(x)=-3x^3+2$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f που είναι κάθετη στην ευθεία $y=x+3$.

Λύση

Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=-9x^2$. Αν η ζητούμενη εφαπτομένη εφάπτεται της C_f στο $(x_0, f(x_0))$ τότε θα ισχύει

$$f'(x_0)(-2) = -1 \Leftrightarrow -9x_0^2 \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow x_0^2 = \frac{1}{9} \Leftrightarrow x_0 = \pm\frac{1}{3}$$

Άρα i) για $x_0 = \frac{1}{3}$ η ζητούμενη ευθεία είναι η

$$y - f\left(\frac{1}{3}\right) = f'\left(\frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3}\right) \text{ ή } y - \frac{17}{9} = -1\left(x - \frac{1}{3}\right)$$

ή $y = -x + \frac{20}{9}$. ii) Όμοια για $x_0 = -\frac{1}{3}$ η ζητούμενη ευθεία είναι η $y = -x + \frac{16}{9}$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Όταν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι μια ευθεία ε: $y = \alpha x + \beta$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f, χωρίς να μας προσδιορίζουν το σημείο επαφής, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $A(x_0, f(x_0))$ στο οποίο η εφαπτόμενη ταυτίζεται με την ευθεία (ε).

Γι' αυτό βρίσκουμε τα κοινά σημεία της ευθείας (ε) και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f λύνοντας το σύστημα: $\begin{cases} y = \alpha x + \beta \\ y = f(x) \end{cases}$ **και εξετάζουμε σε ποιο απ' αυτά (αν υπάρχουν) η ευθεία (ε) είναι εφαπτόμενη στη γραφική παράσταση της f ελέγχοντας αν ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτόμενης δηλ. η παράγωγος στα σημεία αυτά, ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας (ε), δηλ. αν ισχύει: $f'(x_0) = \alpha$ ή με άλλα λόγια: Αρκεί να βρούμε σημείο $A(x_0, y_0)$ έτσι ώστε:**

$$\begin{cases} (1)\ y_0 = \alpha x_0 + \beta \\ (2)\ y_0 = f(x_0) \\ (3)\ f'(x_0) = \alpha \end{cases}$$

Παραδείγματα

1) Να δείξετε ότι η ευθεία $y = 2x + 5$ είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x) = x^2 + 4x + 6$.

Λύση

- Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων: $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = x^2 + 4x + 6 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow x = -1, y = 3$.
- Η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x + 4$. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι $f'(-1) = -2 + 4 = 2$.

Άρα: Η ευθεία $y = 2x + 5$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $A(-1, 3)$.

2) Να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε η ευθεία $y = x + \alpha$ να εφάπτεται στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + \alpha x + 1$ και να προσδιοριστεί το σημείο επαφής.

Λύση

Η $f(x) = x^2 + \alpha x + 1$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = 2x + \alpha$. Για να εφάπτεται η ευθεία $y = x + \alpha$ στη γραφική παράσταση της f αρκεί να υπάρχει σημείο (x_0, y_0):

$$\begin{cases} y_0 = x_0 + \alpha & (1) \\ y_0 = x_0^2 + \alpha x_0 + 1 & (2) \\ 2x_0 + \alpha = 1 & (3) \end{cases}$$

Από την (3) προκύπτει ότι: $x_0 = \frac{1-\alpha}{2}$.

Από την (1) προκύπτει ότι: $y_0 = \frac{1-\alpha}{2} + \alpha = \frac{1+\alpha}{2}$.

Αντικαθιστώντας στην (2) έχουμε: $\frac{1+\alpha}{2}=\left(\frac{1-\alpha}{2}\right)^2+\alpha\cdot\frac{1-\alpha}{2}+1 \Leftrightarrow \cdots \alpha=1 \text{ ή } \alpha=-3$.

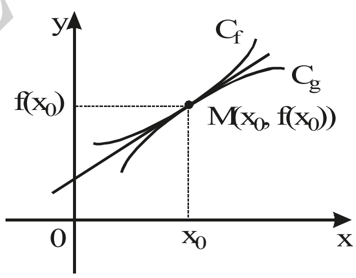
Άρα: Για $\alpha=1$ η ευθεία $y=x+1$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $f(x)=x^2+x+1$ στο $A(0,1)$. Ενώ για $\alpha=-3$ η ευθεία $y=x-3$ εφάπτεται στη γραφική παράσταση της $f(x)=x^2-3x+1$ στο $B(2,-1)$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4.

ΚΟΙΝΗ ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ

i) Ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτόμενης σε κοινό σημείο M(x_0, y_0) των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f, g (C_f, C_g, *αντίστοιχα). Αφού το Μ είναι κοινό σημείο των* C_f, C_g *πρέπει να επαληθεύει και τις δύο εξισώσεις:* $y=f(x)$ *και* $y=g(x)$. *Συνεπώς το* x_0 *είναι λύση της εξίσωσης* $f(x)=g(x)$.

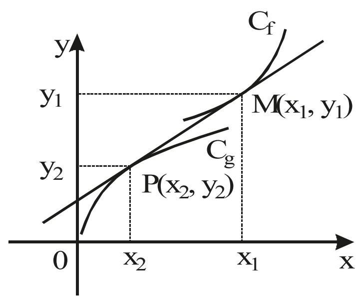
- *Αν οι f, g παραγωγίζονται στο* x_0 *πρέπει οι εφαπτόμενες των* C_f, C_g *στο Μ να ταυτίζονται δηλαδή να έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης. Έτσι έχουμε το σύστημα* $\begin{cases} f(x_0)=g(x_0) \\ \text{και} \\ f'(x_0)=g'(x_0) \end{cases}$



ii) *Ζητείται να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτόμενης των γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων f, g (*C_f, C_g*) σε διαφορετικά σημεία τους Μ. Ρ αντίστοιχα.*

- *Αν τα σημεία Μ, Ρ είναι γνωστά και* ε_1 *η εφαπτομένη της* C_f *στο Μ με εξίσωση:* $y-f(x_1)=f'(x_1)(x_1-x_2)$ *ή* $y=f'(x_1)\cdot x+f(x_1)-f'(x_1)\cdot x_1$ *και* ε_2 *η εφαπτομένη της* C_g *στο Ρ με εξίσωση:* $y-g(x_2)=g'(x_2)\cdot(x-x_2)$ *ή* $y=g'(x_2)\cdot x+g(x_2)-g'(x_2)\cdot x_2$ *πρέπει για να ταυτίζονται οι ευθείες αυτές οι εξισώσεις τους να είναι ίδιες.*

Άρα πρέπει: $f'(x_1)=g'(x_2)$ *και* $f(x_1)-f'(x_1)\cdot x_1=g(x_2)-g'(x_2)\cdot x_2$.

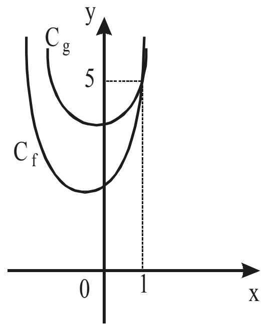


Αν είναι γνωστό το ένα από τα δύο σημεία, έστω το $M(x_1,y_1)$, *τότε θεωρούμε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της* C_f *στο Μ, έστω* $y=\alpha x+\beta$ *και εξετάζουμε αν η ευθεία (ε) εφάπτεται της* C_g. *Αυτό θα συμβαίνει ως γνωστό αν υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο* $A(x_0,y_0)$ *έτσι ώστε:* $\begin{cases} (1)\ y_0=\alpha x_0+\beta \\ (2)\ y_0=g(x_0) \\ (3)\ f'(x_0)=\alpha \end{cases}$

Παράδειγμα 1

Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ ώστε οι γραφικές παραστάσεις των f με $f(x)=x^2+\alpha x+1$ και g με $g(x)=2x^2+x+\beta$ να έχουν κοινή εφαπτομένη στο σημείο $x_0=1$.

Λύση



Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες με $f'(x)=2x+\alpha$ και $g'(x)=4x+1$. Πρέπει

$$\left.\begin{matrix} f(1)=g(1) \\ \text{και } f'(1)=g'(1)\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\alpha=1+\beta \\ 2+\alpha=4+1\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\begin{matrix}\alpha=3\\ \beta=2\end{matrix}$$

Παράδειγμα 2

Να εξετάσετε αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη των γραφικών παραστάσεων των $f(x)=\frac{3}{2}x^2-2x+3$ και $g(x)=-\frac{1}{2}x^2+3$.

Λύση

i) Εξετάζουμε αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη σε κοινό τους σημείο δηλ. αν έχει λύση το σύστημα $\begin{cases} f(x)=g(x)\\ \text{και}\\ f'(x)=g'(x)\end{cases}$ δηλαδή

$$\begin{cases}\frac{3}{2}x^2-2x+3=-\frac{1}{2}x^2+3\\ \text{και}\\ 3x-2=-x\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x^2-4x=0\\ \text{και}\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0 \text{ ή } x=1\\ \text{και}\\ x=\frac{1}{2}\end{cases}$$

το οποίο αδύνατο άρα δεν υπάρχει κοινή εφαπτόμενη των παραπάνω γραφικών παραστάσεων σε κοινό τους σημείο.

ii) Εξετάζουμε αν υπάρχει κοινή εφαπτομένη που εφάπτεται των γραφικών παραστάσεων στα σημεία $(x_1,f(x_1))$ και $(x_2,g(x_2))$ ελέγχοντας αν έχει λύση το σύστημα:

$$\left.\begin{matrix} f'(x_1)=g'(x_2)\\ \text{και}\\ f(x_1)-x_1\cdot f'(x_1)=g(x_2)-x_2\cdot g'(x_2)\end{matrix}\right\}$$

δηλαδή

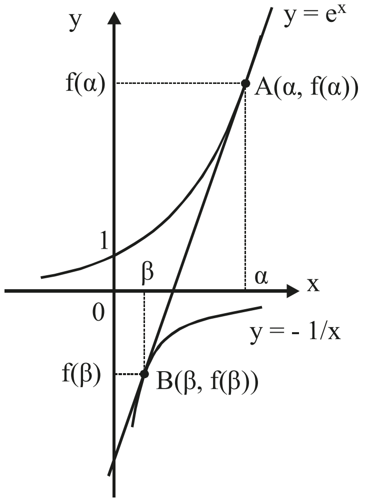
$$\left.\begin{matrix}3x_1-2=-x_2\\ \text{και}\\ \frac{3}{2}x_1^2-2x_1+3-3x_1^2+2x_1=-\frac{1}{2}x_2^2+3+x_2^2\end{matrix}\right\}$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}3x_1+x_2=2\\ \text{και}\\ -3x_1^2=x_2^2\end{matrix}\right\}\text{ το οποίο είναι αδύνατο.}$$

Άρα δεν υπάρχει κοινή εφαπτόμενη των παραπάνω γραφικών παραστάσεων σε κοινό τους σημείο.

Παράδειγμα 3

Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=e^x$ και $g(x)=-\frac{1}{x}$. Ν' αποδείξετε ότι υπάρχει κοινή εφαπτόμενη των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g.



Λύση:

Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν σημεία $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$ των γραφικών παραστάσεων των f και g αντίστοιχα στα οποία οι εφαπτόμενες να ταυτίζονται!

Ως γνωστόν οι εξισώσεις των εφαπτομένων στα A και B έχουν εξισώσεις: $y-f(\alpha)=f'(\alpha)\cdot(x-\alpha)$ και $y-g(\beta)=g'(\beta)\cdot(x-\beta)$ αντίστοιχα ή $y=f'(\alpha)\cdot x+f(\alpha)-\alpha\cdot f'(\alpha)$ και $y=g'(\beta)\cdot x+g(\beta)-\beta\cdot g'(\beta)$ αντίστοιχα!

Για να ταυτίζονται οι παραπάνω ευθείες πρέπει να ισχύει: $f'(\alpha)=g'(\beta)$ και $f(\alpha)-\alpha\cdot f'(\alpha)=g(\beta)-\beta\cdot g'(\beta)$ δηλ. $e^{\alpha}=\dfrac{1}{\beta^2}$ και $e^{\alpha}-\alpha\cdot e^{\alpha}=-\dfrac{1}{\beta}-\beta\cdot\dfrac{1}{\beta^2}\Leftrightarrow e^{\alpha}\cdot\beta^2=1$ και $e^{\alpha}(1-\alpha)=-\dfrac{2}{\beta}\Leftrightarrow e^{\alpha}\cdot\beta^2=1$ και $\beta=\dfrac{2}{e^{\alpha}(\alpha-1)}$.

ΕΠΟΜΕΝΩΣ: Αρκεί να υπάρχει

$$\alpha\in\mathbb{R}: e^{\alpha}\left(\frac{2}{e^{\alpha}(\alpha-1)}\right)^2=1\Leftrightarrow\cdots\Leftrightarrow e^{\alpha}\cdot(\alpha-1)^2-4=0 \quad (1)$$

Το πρόβλημα λοιπόν ανάγεται στην απόδειξη ότι υπάρχει πραγματική ρίζα της εξίσωσης: $e^x\cdot(x-1)^2-4=0$. Προς τούτο θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^x\cdot(x-1)^2-4$ στο $[0,3]$ (Η επιλογή του διαστήματος έγινε έτσι ώστε στα άκρα οι τιμές να είναι ετερόσημες!).

Για την συνάρτηση h ισχύει:

- Η h είναι συνεχής στο $[0,3]$.
- $h(0)=e^0(0-1)^2-4=-3<0$,

  $h(3)=e^3(3-1)^2-4=4(e^2-1)>0$.

Άρα: υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $h(x)=0$ στο $(0,3)\subseteq\mathbb{R}$ δηλ. η εξίσωση: $e^x(x-1)^2-4=0$ έχει στο $\mathbb{R}$ μία τουλάχιστον ρίζα.

Άρα: υπάρχει σημείο $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, g(\beta))$ έτσι ώστε οι εφαπτόμενες των γραφικών παραστάσεων των f και g στα A και B αντίστοιχα ταυτίζονται!

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1. Να δικαιολογήσετε γιατί είναι λάθος οι παρακάτω προτάσεις;

i) Η εφαπτομένη μιας καμπύλης στο Μ δεν μπορεί να τέμνει την καμπύλη στο Μ.

ii) Η εφαπτομένη μιας καμπύλης στο Μ μπορεί να οριστεί σαν η ευθεία που τέμνει την καμπύλη μόνο στο Μ.

ii) Αν η f είναι συνεχής σε όλο το πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχει μια εφαπτομένη σε κάθε σημείο του γραφήματός της.

2. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτομένων της γραφικής παράστασης της f με $f(x)=\frac{1}{3}x^3+x^2-2x+1$ που είναι παράλληλες στην ευθεία $y=x+3$.

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2\sqrt{x}$. Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f που διέρχεται από το σημείο $(-2,1)$.

4. Να βρεθεί ο α ώστε η ευθεία $y=9x-14$ να είναι εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με $f(x)=x^3-3\alpha x+2$. Η εφαπτομένη έχει άλλο κοινό σημείο με τη C_f ;

5. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x+\frac{4}{x}$ και $g(x)=-\frac{3}{2}x^2+\alpha x+2$. Για ποια τιμή του $\alpha\in\mathbb{R}$ η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $A(1,f(1))$ είναι εφαπτόμενη και στη γραφική παράσταση της g;

6. Έστω η συνάρτηση f με $f(x)=x^3$. Να βρεθούν οι ευθείες με εξίσωση $y=\lambda x-6$, $\lambda\neq 0$ ώστε να εφάπτονται της C_f .

7. Έστω οι συναρτήσεις $f(x)=x^2$ και $g(x)=-\frac{1}{x}$. Να βρεθεί η εξίσωση της κοινής εφαπτομένης των γραφικών παραστάσεων των f και g.