ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ ΚΑΙ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Κώστα Βακαλόπουλου
Θάνου Χαραλάμπους

Στην διδασκαλία του μαθήματος των πιθανοτήτων έχει αποδειχθεί ότι οι μαθητές αντιμετωπίζουν μία σημαντική δυσκολία στην αντιμετώπιση ανισοτήτων της μορφής :
$\alpha \le P(E) \le \beta$, όπου E τα ενδεχόμενα:
$A\cap B$, $A\cup B$, $A\cap B' = A-B$, $A'\cap B = B-A$
$A'\cup B$, $A\cup B'$, $A'\cup B'$, $A'\cap B'$.
Θα ασχοληθούμε λοιπόν με την μελέτη αυτών των ανισοτήτων.

1. Για την $P(A\cap B)$.

- $P(A\cup B)\le 1 \Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\le 1$
  $\Rightarrow P(A\cap B)\ge P(A)+P(B)-1$.

Όμως $P(A\cap B)\ge 0$.

Άρα: $\boxed{\max\{0, P(A)+P(B)-1\}\le P(A\cap B)}$ (1)

- Επίσης:

$A\cap B\subseteq A \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)\le P(A)}$ και

$A\cap B\subseteq B \Rightarrow \boxed{P(A\cap B)\le P(B)}$.

Άρα: $\boxed{P(A\cap B)\le \dfrac{P(A)+P(B)}{2}}$.

Όμως η πιο έγκλειστη ανισότητα είναι η παρακάτω:

$\boxed{P(A\cap B)\le \min\{P(A), P(B)\}}$ (2)

2. Για την $P(A\cup B)$.

- $P(A\cap B)\ge 0 \Rightarrow P(A)+P(B)-P(A\cup B)\ge 0$
  $\Rightarrow P(A\cup B)\le P(A)+P(B)$.

Όμως $P(A\cup B)\le 1$.

Άρα: $\boxed{P(A\cup B)\le \min\{1, P(A)+P(B)\}}$ (3)

- Επίσης:

$A\subseteq A\cup B \Rightarrow P(A)\le P(A\cup B)$

$B\subseteq A\cup B \Rightarrow P(B)\le P(A\cup B)$

Άρα: $\boxed{\dfrac{P(A)+P(B)}{2}\le P(A\cap B)}$.

Όμως η πιο έγκλειστη ανισότητα είναι η παρακάτω:

$\boxed{\max\{P(A), P(B)\}\le P(A\cup B)}$ (4)

3. Για την $P(A\cap B') = P(A-B)$.

Εφαρμόζοντας τον τύπο (1) για B το B' έχουμε:

$\max\{0, P(A)+P(B')-1\}\le P(A\cap B') = P(A-B)$

$\boxed{\max\{0, P(A)-P(B)\}\le P(A\cap B') = P(A-B)}$ (5)

Επίσης από τον τύπο (2), για B το B' έχουμε:

$\boxed{P(A\cap B') = P(A-B)\le \min\{P(A), P(B')\}}$ (6)

Επίσης ισχύουν και οι τύποι:

$\boxed{P(A\cap B')\le P(A)}$, $\boxed{P(A\cap B')\le P(B')}$ και

$\boxed{P(A\cap B)\le \dfrac{P(A)+P(B')}{2} = \dfrac{1+P(A)-P(B)}{2}}$

Παρατήρηση:
Ομοίως εργαζόμαστε για τις πιθανότητες των ενδεχομένων: $A'\cap B = B-A$, $A'\cup B$, $A\cup B'$, $A'\cup B'$, $A'\cap B'$.

Στις ασκήσεις που ακολουθούν θα χρησιμοποιήσουμε τους τύπους που αποδείξαμε. Επειδή όμως οι τύποι αυτοί δεν περιέχονται στο σχολικό μας βιβλίο, πριν τους χρησιμοποιήσουμε πρέπει να τους αποδεικνύουμε .

ΑΣΚΗΣΗ 1

Αν $P(A)=\dfrac{1}{3}$, $P(B)=\dfrac{1}{4}$, δείξτε ότι

$\dfrac{1}{12}\le P(A-B)\le \dfrac{3}{4}$.

Απόδειξη

Εφαρμόζοντας τον τύπο (1) για B το B' έχουμε:

$\max\{0, P(A)+P(B')-1\}\le P(A\cap B')\Rightarrow$

$\max\{P(A)-P(B), 0\}\le P(A-B)\Rightarrow$

$\max\left\{\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}, 0\right\} = \boxed{\dfrac{1}{12}\le P(A-B)}$

Αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$\max\{0, P(A)-P(B)\}\le P(A-B)$ και

$P(A-B)\le \min\{P(A), P(B')\}$ και μετά

αντικαθιστούμε: $P(A-B)\le \min\left\{\dfrac{1}{3}, \dfrac{3}{4}\right\} = \dfrac{1}{3} < \dfrac{3}{4}$

Άρα: $\frac{1}{12} \le P(A-B) \le \frac{3}{4}$

Θα μπορούσαμε επίσης να χρησιμοποιούσαμε την ανισότητα: $P(A-B) \le P(B') = \frac{3}{4}$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=\frac{1}{3}$ και $P(B)=\frac{1}{2}$.

- **i) Να αποδειχθεί ότι: $\frac{1}{6} \le P(A' \cap B) \le \frac{1}{2}$.**
- **ii) Να βρεθεί ποια είναι η ελάχιστη και ποια η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η πιθανότητα του ενδεχομένου: $A \cap B$.**

ΛΥΣΗ

i)

- Εφαρμόζοντας τον τύπο (1) για Α το A' έχουμε:

$$\max\{0, P(A') + P(B) - 1\} \le P(A' \cap B) \Rightarrow$$

$$\max\{0, P(A') + P(B) - 1\} \le P(A' \cap B) \xRightarrow{P(A')=1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}}$$

$$\max\left\{0, \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 1\right\} \le P(A' \cap B) \Rightarrow$$

$$\max\left\{0, \frac{1}{6}\right\} = \boxed{\frac{1}{6} \le P(A' \cap B)}$$

- Εφαρμόζοντας τον τύπο (2) πάλι για Α το A' έχουμε: $P(A' \cap B) \le \min\{P(A'), P(B)\} \Rightarrow$

$$P(A' \cap B) \le \min\left\{1 - \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow$$

$$P(A' \cap B) \le \min\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$$

$$P(A' \cap B) \le \frac{1}{3} \text{ Άρα: } \boxed{\frac{1}{6} \le P(A' \cap B) \le \frac{1}{2}}$$

Σημείωση 1: *Για την απόδειξη του 2ου μέλους της παραπάνω ανισότητας θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε τη γνωστή ιδιότητα:*

$$A' \cap B \subseteq B \Rightarrow P(A' \cap B) \le P(B) \Rightarrow P(A' \cap B) \le \frac{1}{2}$$

Σημείωση 2: *Το 1ο ερώτημα μπορούμε να το αποδείξουμε και μετατρέποντας την ζητούμενη σχέση σε άλλη ισοδύναμή της, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες λογισμού των πιθανοτήτων. Πράγματι:*

$$\frac{1}{6} \le P(A' \cap B) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{6} \le P(B) - P(A \cap B) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{6} \le \frac{1}{2} - P(A \cap B) \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \le -P(A \cap B) \le 0 \Leftrightarrow$$

$0 \le P(A \cap B) \le \frac{1}{3}$. Όμως $P(A \cap B) \ge 0$ (προφανής) και επειδή $A \cap B \subseteq A$ ισχύει: $P(A \cap B) \le P(A) = \frac{1}{3}$

ii) Σύμφωνα με τον τύπο (1) έχουμε:

$$\max\{0, P(A) + P(B) - 1\} \le P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\max\left\{0, \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1\right\} \le P(A \cap B) \Rightarrow$$

$$\max\left\{0, -\frac{1}{6}\right\} = \boxed{0 \le P(A \cap B)}.$$

Επίσης από τον τύπο (2) έχουμε:

$$P(A \cap B) \le \min\left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\} \Rightarrow \boxed{P(A \cap B) \le \frac{1}{3}}.$$

Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι: $0 \le P(A \cap B) \le \frac{1}{3}$. Η ισότητα: $P(A \cap B) = 0$ ισχύει αν τα ενδεχόμενα Α και Β είναι ξένα μεταξύ τους και η ισότητα $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ ισχύει αν $A \subseteq B$ οπότε $A \cap B = A$. Άρα η ελάχιστη τιμή της πιθανότητας του ενδεχομένου $A \cap B$ είναι 0 και η μέγιστη τιμή του είναι $\frac{1}{3}$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $P(A)=\frac{1}{5}$ και $P(B)=\frac{2}{7}$ να αποδειχθεί ότι: $\frac{5}{7} \le P(A \cup B') \le \frac{32}{35}$.

ΛΥΣΗ

- Εφαρμόζοντας τον τύπο (3) για Β το B' έχουμε:

$$P(A \cup B') \le \min\{1, P(A) + P(B')\} \Rightarrow$$

$$P(A \cup B') \le \min\{1, P(A) + 1 - P(B)\} \Rightarrow$$

$$P(A\cup B')\le \min\left\{1,\frac{1}{5}+1-\frac{2}{7}\right\}=\min\left\{1,\frac{32}{35}\right\}\Rightarrow$$

$$\boxed{P(A\cup B')\le \frac{32}{35}}$$

- Εφαρμόζοντας τον τύπο (4) πάλι για B το

  B' έχουμε:

  $$\max\{P(A),P(B')\}\le P(A\cup B)\Rightarrow$$

  $$\max\{P(A),1-P(B)\}\le P(A\cup B')\Rightarrow$$

  $$\max\left\{\frac{1}{5},1-\frac{2}{7}\right\}\le P(A\cup B')\Rightarrow$$

  $$\max\left\{\frac{1}{5},\frac{5}{7}\right\}=\boxed{\frac{5}{7}\le P(A\cup B')}$$

  Άρα: $\frac{5}{7}\le P(A\cup B')\le \frac{32}{35}$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Για τα ενδεχόμενα Α, Β του ίδιου δειγματικού χώρου Ω ισχύουν $P(B')=\frac{1}{4}$ και $P(A\cup B)=\frac{7}{5}$.

Να αποδειχθεί ότι: $\frac{13}{20}\le P(A)\le \frac{7}{5}$.

ΛΥΣΗ

Στην άσκηση αυτή δεν θα εφαρμόσουμε τους παραπάνω τύπους αφού η πιθανότητα που ζητείται δεν είναι της τομή ή ένωση ενδεχομένων. Όμως θα εφαρμόσουμε την ίδια «λογική» που χρησιμοποιήσαμε για να αποδείξουμε τους παραπάνω τύπους.

- Πράγματι:

  $$A\subseteq A\cup B\Rightarrow P(A)\le P(A\cup B)\Rightarrow \boxed{P(A)\le \frac{7}{5}}$$

- Επίσης: $\boxed{0\le P(A\cap B)}\le 1\Rightarrow$

  $$0\le P(A)+P(B)-P(A\cup B)\le 1 \overset{P(B)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}}{\Rightarrow}$$

  $$0\le P(A)+\frac{3}{4}-\frac{7}{5}\le 1\Rightarrow 0\le P(A)-\frac{13}{20}\le 1\Rightarrow$$

  $$\boxed{\frac{13}{20}\le P(A)}\le 1+\frac{13}{20}.$$

  (Σημείωση: Στην παραπάνω ανισότητα θα μπορούσε να έλειπε το 2^o μέλος)

Άρα: $\frac{13}{20}\le P(A)\le \frac{7}{5}$