ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

Αδαμίδης Ηλίας, Στυλιανίδου Αλεξάνδρα (ασκήσεις: 4,5,6,7,10,11)

Βακαλόπουλος Κώστας (ασκήσεις: 8,9)

Κατωτριώτης Κωνσταντίνος (ασκήσεις:1,2,3)

Άσκηση 1

Έστω $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu$ και $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_\nu$ οι παρατηρήσεις δυο δειγμάτων αντίστοιχα των μεταβλητών Χ και Ψ. Δίνεται ότι η μέση τιμή των χ_i ίναι $\bar{\chi} = 10$ και ισχύει $\psi_i = \frac{1}{1+t^2}\chi_i + \bar{x}$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$, $t \in R$.

α) Να βρείτε την δειγματική μέση τιμή $\bar{\psi}$ και τυπική απόκλιση s_ψ της Ψ συναρτήσει του t και s_x .

β) Να βρείτε την μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η δειγματική τυπική απόκλιση s_χ της Χ ώστε το δείγμα παρατηρήσεων της Ψ να είναι ομοιογενές για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

γ) Αν s_χ= 2 , τότε

i) Βρείτε την $\bar{\psi}$ και s_ψ , καθώς και την σχετική διασπορά των ψ_i .

ii) Ποιό από τα παραπάνω δείγματα έχει μεγαλύτερη ομοιογένεια;

iii) Αν το δείγμα των ψ_i ακολουθεί κατά προσέγγιση την κανονική κατανομή , ποια η πιθανότητα , μια στην τύχη παρατήρηση από το δείγμα της Ψ , να ανήκει στο διάστημα $(16, 20)$.

ΛΥΣΗ

α) Από γνωστή εφαρμογή του σχολικού βιβλίου θα είναι : $\bar{\psi} = \frac{1}{1+t^2}\bar{x} + \bar{\chi} = \frac{10}{1+t^2} + 10 = \frac{10(2+t^2)}{1+t^2}$ και $s_\psi = \left|\frac{1}{1+t^2}\right| s_\chi = \frac{1}{1+t^2} s_x$.

β) Για να παρουσιάζει το δείγμα των τιμών της Ψ ομοιογένεια πρέπει και αρκεί: $CV_\psi \le 0{,}1$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$.Όμως:

$$CV_\psi \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{s_\psi}{|\bar{\psi}|} \le 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{s_x}{10\left(2+t^2\right)} \le \frac{1}{10}$$

$\Leftrightarrow s_x \le 2+t^2$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Επομένως η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η τυπική απόκλιση s_x είναι το ελάχιστο της συνάρτησης $g(t) = 2+t^2$, $t \in \mathbb{R}$. Το ελάχιστο της συνάρτησης g είναι το 2 για $t = 0$. Άρα η μέγιστη τιμή της τυπικής απόκλισης s_ψ είναι το $s_x = 2$.

γ) ι) Για $s_\chi = 2$ (άρα t=0) , από το α) ερώτημα παίρνουμε $\bar{\psi}$= 20 και $s_\psi = 2$ και $CV_\psi = \frac{2}{20} = 0{,}1$.

ii) $CV_x = \frac{2}{10} = 0{,}2$, $CV_\psi = \frac{2}{20} = 0{,}1$. Επειδή $CV_x > CV_\psi$, προκύπτει ότι μεγαλύτερη ομοιογένεια έχει το δείγμα με τον μικρότερο συντελεστή μεταβολής δηλαδή το δείγμα της μεταβλητής Ψ.

δ) Αφού είναι $\bar{\psi} = 20$ και $s_\psi = 2$, και οι δειγματικές τιμές της ψ ακολουθούν την κανονική κατανομή τότε το διάστημα (16, 22) αντιστοιχεί στο $(\bar{\psi} - 2s_\psi, \bar{\psi} + s_\psi)$, στο οποίο εμφανίζεται το $\frac{1}{2}95\% + 34\% = 81{,}5\%$. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 0,815.

Άσκηση 2

Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = e^{-(t_1-x)^2-(t_2-x)^2-\ldots-(t_\nu-x)^2}$, με $t_i, i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ οι παρατηρήσεις μιας μεταβλητής Τ με μέση τιμή $\bar{T}$ και τυπική απόκλιση s_T . Δίνεται ότι:

- **Η μέγιστη τιμή της f ισούται με $e^{-\frac{1}{\nu_3}}$**
- $\lim\limits_{x \to \bar{T}} \frac{f'(x)}{T^2 - x^2} = -e^{-\nu \cdot s_T^2}$

α) Να δείξετε ότι: $\bar{T} = \nu$ και $s_T = \frac{1}{\nu^2}$

β) Αν ο συντελεστής μεταβλητότητας των $t_i, i = 1, 2, 3, \ldots, \nu$ ισούται με 5^{-3} , να δείξτε ότι $\nu = 5$.

γ) Θεωρούμε το συνολικό δείγμα παρατηρήσεων Δ που διαμορφώνεται από τις $t_i, i = 1, 2, 3, 4, 5$ του αρχικού δείγματος Δ_1 και τις παρατηρήσεις $t_i, i = 6, 7, \ldots, 15$ ενός άλλου δείγματος Δ_2. Αν η μέση $\bar{T}_\Delta = 3$ και τυπική απόκλιση $s_\Delta = 2$, τότε να δείξτε ότι η μέση τιμή $\bar{T}_{\Delta_2}$ =2 και η τυπική απόκλισή s_{Δ_2}=1,73.

<u>Λύση</u> :

α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ $CV_T = 5^{-3} \Rightarrow \frac{s_T}{\bar{T}} = 5^{-3} \Rightarrow \frac{1}{\nu^3} = \frac{1}{5^3} \Rightarrow \nu = 5$. Τότε $\bar{T} = 5$ και $s_T = \frac{1}{25}$.

γ) Για $\nu=5$ το αρχικό δείγμα έχει μέση τιμή $\bar{T}_{\Delta}=3$ και τυπική απόκλιση $s_{\Delta}=\frac{1}{25}$.

Άρα: $\sum_{i=1}^{5} t_i=5\cdot 5=25$ και

$$\frac{1}{625}=\frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} t_i^{\,2}-\bar{T}^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^{5} t_i^{\,2}=125+\frac{1}{125}$$

Έστω $\bar{T}_{\Delta_1}=\frac{\sum_{i=5}^{15} t_i}{10}$ η μέση τιμή και s_{Δ_1} η τυπική απόκλιση του δείγματος Δ_2.

Για τη μέση τιμή $\bar{T}_{\Delta}$ και την τυπική απόκλιση s_{Δ} του συνολικού δείγματος ισχύει:

$$\bar{T}_{\Delta}=\frac{\sum_{i=1}^{5} t_i+\sum_{i=6}^{15} t_i}{15} \Rightarrow \sum_{i=6}^{15} t_i=15\cdot 3-25=20 \text{ οπότε}$$

έχ$g'(x)=\frac{-2x}{\left(1+x^2\right)^2}<0$ουμε: $\boxed{\bar{T}_{\Delta_1}=\frac{20}{10}=2}$

Επίσης: $s_{\Delta}^{\,2}=\frac{1}{15}\left(\sum_{i=1}^{5} t_i^{\,2}+\sum_{i=6}^{15} t_i^{\,2}\right)-\bar{T}^2 \Rightarrow$

Οπότε έχουμε:

$$s_{\Delta_1}^{\,2}=\frac{1}{10}\sum_{i=6}^{15} t_i^{\,2}-\bar{T}_{\Delta_2}=\frac{1}{10}\left(70-\frac{1}{125}\right)-2^2=$$

$$3-\frac{1}{1250}\simeq 3 \Rightarrow \boxed{s_{\Delta_2}\simeq\sqrt{3}}$$

Άσκηση 3

Καθένας από τους μαθητές ενός σχολείου συμμετέχει σε ένα τουλάχιστον από τα μοναδικά εκπαιδευτικά προγράμματα α και β που διοργανώνει το σχολείο τους.

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β, με
Α : ένας μαθητής να συμμετέχει στο πρόγραμμα α και
Β : ένας μαθητής να συμμετέχει στο πρόγραμμα β, με $A,B\neq\varnothing$, $A\cap B\neq\varnothing$ και την συνάρτηση

$$f(x)=\frac{P(A-B)-P(B')}{x}-\ln(-x)+2.$$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f και να δείξτε ότι είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να δείξτε ότι η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f' σε οποιοδήποτε σημείο της $(x_0, f(x_0))$ σχηματίζει με τους άξονες συντεταγμένων τρίγωνο με σταθερό εμβαδόν, ίσο με 2 τ.μ.

γ) Ορίζουμε ως πιθανότητα P(A) του A, το 9/10 του εμβαδού του πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων μιας κατανομής και ως πιθανότητα P(B) του B, την διάμεσο τιμή των τιμών $g\left(\frac{1}{\kappa}\right)$, $g(\kappa)$, $g\left(\frac{1}{\kappa}\right)$, $g(5)$, με $1<\kappa<5$ της συνάρτησης $g(x)=\frac{1}{1+x^2}$, $x>0$.

i) Βρείτε τις πιθανότητες P(A), P(B).

ii) Με ποια πιθανότητα πραγματοποιείται ακριβώς ένα από τα A, B.

Λύση: α) Είναι $P(A-B)-P(B')=$
$P(A)-P(A\cap B)-1+P(B)=P(A\cup B)-1$.

Αφού κάθε μαθητής συμμετέχει σε ένα τουλάχιστον των προγραμμάτων α, β, τότε $A\cup B=\Omega$ με $P(A\cup B)=1$. Οπότε $P(A-B)-P(B')=0$. Έτσι η συνάρτηση f γίνεται: $f(x)=-\ln(-x)+2$.

Το σύνολο ορισμού της είναι το $(-\infty,0)$ και

$$f'(x)=-\frac{1}{-x}(-x)'=-\frac{1}{x}>0 \text{ για } x<0.$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0)$.

β) Είναι $f''(x)=\frac{1}{x^2}$. Η εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f' στο σημείο με τετμημένη x_0 είναι:

$y-f'(x_0)=f''(x_0)(x-x_0)$ δηλαδή η $y=\frac{1}{x_0^{\,2}}x-\frac{2}{x_0}$ και τέμνει τους άξονες στα σημεία $K\left(0,-\frac{2}{x_0}\right)$ και $\Lambda(0,2x_0)$. Οπότε το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ είναι

$$(OK\Lambda)=\frac{1}{2}\left|-\frac{2}{x_0}\right|\left|2x_0\right|=2 \text{ τ.μ.}$$

γ) (i) Είναι γνωστό ότι το εμβαδό του πολυγώνου σχετικών συχνοτήτων ισούται με 1. Άρα θα είναι $P(A)=\frac{9}{10}$.

Για κάθε $x>0$ είναι $g'(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}<0$.

Άρα η g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Οπότε: $1<\kappa<5 \Rightarrow \frac{1}{5}<\frac{1}{\kappa}<\kappa<5 \Rightarrow$

$g\left(\frac{1}{5}\right)>g\left(\frac{1}{\kappa}\right)>g(\kappa)>g(5)$. Επομένως:

$$P(B)=\delta=\frac{g(\kappa)+g\left(\frac{1}{\kappa}\right)}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+\kappa^2}+\frac{\kappa^2}{1+\kappa^2}\right)=\frac{1}{2}$$

ii) Επειδή $A-B$ και $B-A$ είναι ασυμβίβαστα έχουμε:

$P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A-B)+P(B-A)$

$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$ (1). Όμως

$P(A\cup B)=1 \Rightarrow P(A\cap B)=P(A)+P(B)-1=$

$=\frac{9}{10}+\frac{5}{10}-1=\frac{2}{5}$. οπότε σύμφωνα με την (1) θα

είναι: $P((A-B)\cup(B-A))=\frac{14}{10}-\frac{8}{10}=\frac{3}{5}$

Άσκηση 4

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{x^2-4}{\sqrt{x+7}-3}$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

β) Να βρεθεί το σημείο $E(x,f(x))$ στο οποίο η γραφική παράσταση της f τέμνει τον ημιάξονα Ox.

γ) Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

δ) Έστω x_i με $i=1,2,3,4$ οι τιμές μιας μεταβλητής x ενός δείγματος μεγέθους ν=80 Εάν $m=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας.

x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i
1	**8**			
2	**m**			
3				
4		**0,2**		
ΣΥΝΟΛΟ				

Λύση

α) Για να ορίζεται η $f(x)$ πρέπει και αρκεί: $x+7\geq 0$ και $\sqrt{x+7}-3\neq 0$,δηλαδή $x\geq -7$ και $\sqrt{x+7}\neq 3$ δηλαδή $x\geq -7$ και $x+7\neq 9$ δηλαδή $x\geq -7$ και $x\neq 2$

Επομένως $A_f=[-7,2)\cup(2,+\infty]$

β) Για να βρούμε που τέμνει η C_f τον θετικό ημιάξονα Ox λύνουμε την εξίσωση: $y=f(x)=0$ Έχουμε: $f(x)=0 \Rightarrow x^2-4=0$ άρα $x=2$ ή $x=-2<0$, απορρίπτεται. Άρα η C_f τέμνει τον Ox στο σημείο $E(2,0)$.

γ) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{\sqrt{x+7}-3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)(x-2)(\sqrt{x+7}+3)}{x+7-9}=$

$\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+2)\cancel{(x-2)}(\sqrt{x+7}+3)}{\cancel{x-2}}=$

$\lim\limits_{x\to 2}(x+2)(\sqrt{x+7}+3)=4\cdot 6=24$

δ) Είναι $m=\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ άρα $m=24$, $\nu=80$

έτσι: $f_1=\frac{\nu_1}{\nu}=\frac{8}{80}=0{,}10$, $f_2=\frac{\nu_2}{\nu}=\frac{24}{80}=0{,}30$,

$f_4=\frac{\nu_4}{\nu}\Rightarrow \nu_4=f_4\cdot\nu=0{,}2\cdot 80=16$ ακόμα :

$\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4=\nu \Rightarrow 8+24+\nu_3+16=80 \Rightarrow$

$\nu_3=32$. Έτσι ο πίνακας κατανομής συχνοτήτων γίνεται:

x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i
1	8	0,10	8	0,10
2	24	0,30	32	0,40
3	32	0,40	64	0,80
4	16	0,20	80	1
ΣΥΝΟΛΟ	ν=80	1		

Άσκηση 5

Έστω οι παρατηρήσεις x_i με $i=1,2,3...,\nu$ οι οποίες έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση S_x. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x)=\frac{20}{3}x^3+4x^2-x+2015, x\in R.$$

Εάν CV ο συντελεστής μεταβλητότητας των παρατηρήσεων x_i και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g , στο σημείο $M(CV,g(CV))$ είναι παράλληλη στον $x'x$ άξονα τότε:

α) Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές, ή όχι.

β) Εάν επιπλέον γνωρίζουμε ότι οι παρατηρήσεις: $y_i = g''(x_i)$, όπου $i = 1,2,3...,\nu$ έχουν μέση τιμή $\bar{y} = 808$ να βρείτε:

i) τη μέση τιμή $\bar{x}$ των παρατηρήσεων x_i

ii) την τυπική απόκλιση S_y των παρατηρήσεων y_i

Λύση

α) Είναι: $g'(x) = 20x^2 + 8x - 1, \forall x \in R$

Η εφαπτομένη ευθεία της γραφικής παράστασης της συνάρτησης g στο σημείο $M(CV, g(CV))$ είναι παράλληλη στον άξονα x'x τότε και μόνο τότε όταν: $g'(CV) = 0$ άρα ισοδύναμα:

$$20(CV)^2 + 8(CV) - 1 = 0 \qquad (1)$$

Από την εξίσωση (1) προκύπτει $CV = -\frac{1}{2} < 0$ (απορρίπτεται) ή $CV = \frac{1}{10} = 10\%$. Άρα το δείγμα είναι (οριακά) ομοιογενές.

β) i) Είναι $g''(x) = 40x + 8$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έτσι έχουμε: $y_i = g''(x_i) = 40x_i + 8$ με $i = 1,2,3...,\nu$

Άρα $40x_i = y_i - 8 \Rightarrow x_i = \frac{1}{40}(y_i - 8)$ με $i = 1,2,3...,\nu$ οπότε σύμφωνα με την εφαρμογή του σχολικού βιβλίου σελ.99, $\bar{x} = \frac{1}{40}(\bar{y} - 8)$ άρα

$$\bar{x} = \frac{1}{40}(808 - 8) = \frac{800}{40} \Rightarrow \bar{x} = 20$$

ii) $CV_x = \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{S_x}{|\bar{x}|} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{S_x}{|20|} = \frac{1}{10} \Leftrightarrow S_x = 2$

Σύμφωνα με την ίδια εφαρμογή (σελ.99) οι παρατηρήσεις $t_i = 40x_i$ έχουν τυπική απόκλιση: $S_t = 40S_x = 40 \cdot 2 = 80$. Έτσι τώρα οι παρατηρήσεις $y_i = 40x_i + 8 \Leftrightarrow y_i = t_i + 8$ έχουν τυπική απόκλιση : $S_y = S_t = 80$

Άσκηση 6

Έστω οι παρατηρήσεις x_i με $i = 1,2,3...,\nu$ ενός δείγματος μεγέθους ν που έχουν μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = (x - 1 - s) \cdot e^{x+2015}, \forall x \in R$ $x = 1$ η οποία παρουσιάζει ελάχιστο για $x = 1$ το $g(1) = -e^{\bar{x}+2006}$.

α) Να βρείτε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και την τυπική απόκλιση s .

β) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές ή όχι.

γ) Επιλέγουμε τυχαία έναν αριθμό k από το σύνολο:. $\Omega = \{-40, -39, ..., -1, 0, 1, ..., 39, 40\}$. και θεωρούμε τις παρατηρήσεις: $t_i = x_i + k$. με $i = 1,2,3...,\nu$.

Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

i) Α: "Το δείγμα των παρατηρήσεων t_i να έχει συντελεστή μεταβλητότητας"

ii) Β: "Το δείγμα των παρατηρήσεων t_i να μην είναι ομοιογενές"

Λύση

α) Είναι :

$g'(x) = (x - 1 - s)' \cdot e^{x+2015} + (x - 1 - s) \cdot \left(e^{x+2015}\right)' =$

$1 \cdot e^{x+2015} + (x - 1 - s) \cdot e^{x+2015} =$

$(1 + x - 1 - s) \cdot e^{x+2015} = (x - s) \cdot e^{x+2015}, \forall x \in R$

Έτσι αν $g'(x) = 0$ τότε

$(x - s) \cdot e^{x+2015} = 0 \Rightarrow x - s = 0 \Rightarrow x = s$.

Επομένως έχουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών:

x	$-\infty$	s	$+\infty$
$g'(x)$	-	○	+
$g(x)$	↘	min	↗

Άρα στο διάστημα $(-\infty, s]$ η $g(x)$ είναι ↘, ενώ στο διάστημα $[s, +\infty)$ η $g(x)$ είναι ↗ . Παρουσιάζει ελάχιστο για $x = s$ το $g_{min} = g(s) = -e^{s+2015}$.

Αλλά είναι γνωστό ότι το ελάχιστο της g παρουσιάζεται στο σημείο $x = 1$ και είναι $g_{min} = g(1) = -e^{\bar{x}+2006}$.

Άρα $s = 1$ και $-e^{1+2015} = -e^{\bar{x}+2006}$

$s = 1$ και $e^{2016} = e^{\bar{x}+2006}$

$s = 1$ και $\bar{x} = 2016 - 2006 = 10$

β) Έτσι τώρα ο συντελεστής μεταβολής του δείγματος είναι: $CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1}{10}$ κ άρα

$CV\% = \frac{1}{10}\% = 10\%$, άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

γ) Έχουμε ότι $t_i = x_i + k$ με $i = 1,2,3...,\nu$ άρα (σύμφωνα με την εφαρμογή του βιβλ.σελ.99) οι παρατηρήσεις t_i έχουν μέση τιμή $\bar{t} = \bar{x} + k = 10 + k$ και τυπική απόκλιση $S_t = S_x = 1$

i) Το δείγμα των παρατηρέων t_i έχει συντελεστή μεταβολής $CV_t = \frac{S_t}{|\bar{t}|} = \frac{1}{|\bar{t}|} = \frac{1}{|10+k|}$ κ αυτό ισχύει αν κ μόνο αν $10 + k \neq 0 \Leftrightarrow k \neq -10$.

Έτσι το ενδεχόμενο Α έχει στοιχεία όλα τα απλά ενδεχόμενα του Ω εκτός του -10.

Δηλ. $N(A) = 80$ και $N(\Omega) = 81$ κ σύμφωνα με τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας είναι

$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{80}{81}$.

ii) Για να μην είναι ομοιογενές το δείγμα των παρατηρήσεων t_i πρέπει και αρκεί: $CV > 0{,}1$.

$CV_t > 10\% \Leftrightarrow \frac{1}{|10+k|} > \frac{1}{10} \Leftrightarrow |10+k| < 10 \Leftrightarrow$

$-10 < 10 + k < 10$ και $k \neq -10$ δηλαδή $-20 < k < 0$ και $k \neq -10$, άρα με μέθοδο αναγραφής το σύνολο Β είναι:

$B = \{-19,-18,-17,-16,...-11,-9,-8,...,-1\}$. Άρα:

$N(B) = 18$ και $N(\Omega) = 81$ άρα $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{18}{81}$.

Άσκηση 7

Α. Έστω ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{0,1,2,3,...,1000\}$. Δίνονται οι πιθανότητες:

$P(m) = \frac{1}{m^2 + m}$ όπου $m = 1,2,3,...,1000$

α) Να αποδειχθεί ότι: $P(m) = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$.

β) Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(0)$.

Β. Εάν Κ και Λ είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου,

i) Να αποδείξετε ότι:

$P(K \cup \Lambda) \leq 2 - P(K') - P(\Lambda')$

ii) Αν $P(K') \cdot P(\Lambda') = \frac{4}{9}$ (1) να δείξετε ότι $P(K \cup \Lambda) \leq \frac{2}{3}$

Λύση

Α.α) Για κάθε m θετικό ακέραιο με $1 \leq m \leq 1000$ ισχύει:

$$P(m) = \frac{1}{m^2+m} = \frac{m+1-m}{m^2+m} = \frac{m+1}{m^2+m} - \frac{m}{m^2+m} = \frac{\cancel{m+1}}{m(\cancel{m+1})} - \frac{\cancel{m}}{\cancel{m}(m+1)} = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}$$

β) Από τον ορισμό πιθανότητας έχουμε ότι:

$P(\Omega) = 1 \Leftrightarrow P(0) + P(1) + P(2) + ... + P(1000) = 1$

δηλαδή:

$$P(0) + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) ... + \left(\frac{1}{1000} - \frac{1}{1001}\right) = 1$$

$$\Rightarrow P(0) + 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + ... - \frac{1}{1000} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{1001} = 1$$

$$\Rightarrow P(0) + 1 - \frac{1}{1001} = 1 \Rightarrow P(0) = \frac{1}{1001}$$

Β. i) Έχουμε ότι

$P(K \cup \Lambda) = P(K) + P(\Lambda) - P(K \cap \Lambda)$

όμως $P(K \cap \Lambda) \geq 0$ άρα:

$P(K \cup \Lambda) \leq P(K) + P(\Lambda) \Rightarrow$

$P(K \cup \Lambda) \leq 1 - P(K') + 1 - P(\Lambda') \Rightarrow$

$P(K \cup \Lambda) \leq 2 - P(K') - P(\Lambda')$

ii)

$$2 - P(K') - P(\Lambda') \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow 2 - \frac{2}{3} \leq P(K') + P(\Lambda') \Leftrightarrow$$

$$P(K') + P(\Lambda') \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{4}{9P(\Lambda')} + P(\Lambda') \geq \frac{4}{3} \Leftrightarrow$$

$$\frac{4}{9P(\Lambda')} 9P(\Lambda') + 9[P(\Lambda')]^2 \geq \frac{4}{3} 9P(\Lambda') \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4 + 9[P(\Lambda')]^2 \geq 12P(\Lambda') \Leftrightarrow$$

$$9[P(\Lambda')]^2 - 12P(\Lambda') + 4 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$[3P(\Lambda')]^2 - 2 \cdot 3 \cdot P(\Lambda') \cdot 2 + 2^2 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$[3P(\Lambda') - 2]^2 \geq 0$$

που ισχύει άρα ισοδύναμα ισχύει και η αρχική.

Άσκηση 8

Στην εθνική ομάδα στίβου υπάρχουν άνδρες και γυναίκες που άλλοι είναι άλτες(τριες) και άλλοι όχι. Η πιθανότητα του ενδεχομένου να επιλέξουμε τυχαία έναν αθλητή και να είναι άλτης(τρια) είναι 34%. Το ποσοστό των ανδρών που είναι άλτες είναι 30% ενώ των γυναικών που είναι άλτριες είναι 40%. Να βρεθεί η πιθανότητα αν επιλέξουμε τυχαία έναν αθλητή να είναι άνδρας.

Λύση

Έστω A: Το ενδεχόμενο ο τυχαία επιλεγόμενος αθλητής να είναι άνδρας και B: το ενδεχόμενο ο τυχαία επιλεγόμενος αθλητής να είναι επικοντιστής(στρια). Η πιθανότητα του ζητείται ενώ η πιθανότητα του B είναι $P(B)=0{,}16$. Επίσης:

$$N(A\cap B)=30\%N(A)\Rightarrow\frac{N(A\cap B)}{N(\Omega)}=30\%\frac{N(A)}{N(\Omega)}$$

$$\Rightarrow P(A\cap B)=0{,}30\cdot P(A).$$

$$N(A'\cap B)=40\%N(A')\Rightarrow\frac{N(A'\cap B)}{N(\Omega)}=$$

$$40\%\frac{N(A')}{N(\Omega)}\Rightarrow P(A'\cap B)=0{,}40\cdot P(A')\Rightarrow$$

$$P(A'\cap B)=0{,}40\cdot[1-P(A)]\Rightarrow$$

$$P(B)-P(A\cap B)=0{,}40\cdot[1-P(A)]\Rightarrow$$

$$0{,}34-0{,}30\cdot P(A)=0{,}40-0{,}40\cdot P(A)\Rightarrow$$

$$P(A)=0{,}60=60\%$$

Άσκηση 9

Έστω Ω δειγματικός χώρος πειράματος τύχης αποτελούμενος από απλά ισοπίθανα ενδεχόμενα με $2011<N(\Omega)<2019$. Αν $A\neq\varnothing$ και $A\neq\Omega$ και $16\cdot\frac{P(A)}{P(A')}+\frac{1}{P(A)}\leq 9$

i) Να βρείτε το πλήθος των στοιχείων του Ω και την πιθανότητα του ενδεχομένου A.

ii) Έστω A και B δυο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα του Ω και η συνάρτηση:

$$f(x)=P(A\cap B)x^{2015}-\frac{5}{2}P(A\cup B)x^2+$$

$$+\big(P(A)+P(B)\big)x+\frac{403}{2},\ x\in[0,1]$$

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να αποδείξετε ότι: $f(x)\leq\frac{P(A\cup B)+2015}{10}$ για κάθε $x\in[0,1]$

γ) Αν $P(A)=\frac{1}{5}$ και $P(B)=\frac{3}{5}$ τότε να δείξετε ότι η διάμεσος των τεσσάρων αριθμών: $f\big(P(A)\big)$, $f\big(P(B')\big)$, $f\big(P(A'\cup B')\big)$, $f\big(P(A\cup B')\big)$ είναι ο αριθμός: $\frac{403}{2}$.

Λύση

i) $16\cdot\frac{P(A)}{P(A')}+\frac{1}{P(A)}\leq 9\Rightarrow 16\cdot\frac{P(A)}{1-P(A)}+\frac{1}{P(A)}\leq 9$

$$\overset{0<P(A)<1}{\Rightarrow} 16\cdot(P(A))^2+1-P(A)\leq 9\cdot P(A)(1-P(A))$$

$$\Rightarrow 16\cdot(P(A))^2+1-P(A)\leq 9\cdot P(A)-9\cdot(P(A))^2$$

$$\Rightarrow 25\cdot(P(A))^2+1-10P(A)\leq 0\Rightarrow(5P(A)-1)^2\leq 0$$

$$\Rightarrow 5P(A)-1=0\Rightarrow\boxed{P(A)=\frac{1}{5}}\Rightarrow\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{5}$$

$\Rightarrow N(\Omega)=5\cdot N(A)=$ πολ/σιο του 5.

Όμως $2011<N(\Omega)<2019\Rightarrow\boxed{N(\Omega)=2015}$

ii) Επειδή τα A και B είναι ασυμβίβαστα ισχύει $P(A\cap B)=0$ και $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. Άρα:

$$f(x)=-\frac{5}{2}P(A\cup B)x^2+P(A\cup B)x+\frac{403}{2}$$

α) $f'(x)=-5P(A\cup B)x+P(A\cup B),\ x\in[0,1]$

- $f'(x)=0\Leftrightarrow -5P(A\cup B)x+P(A\cup B)=0$ $\Leftrightarrow x=\frac{1}{5}$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow -5P(A\cup B)x+P(A\cup B)>0$ $\Leftrightarrow x<\frac{1}{5}$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow x>\frac{1}{5}$

Άρα: Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0,\frac{1}{5}\right]$, γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{5},1\right]$ και παρουσιάζει μέγιστο για $x=\frac{1}{5}$.

β) Από το ερώτημα α) προκύπτει ότι: $f(x)\le f\left(\frac{1}{5}\right)\Rightarrow$

$f(x)\le -\frac{5}{2}P(A\cup B)\left(\frac{1}{5}\right)^2+P(A\cup B)\frac{1}{5}+\frac{403}{2}\Rightarrow$

$f(x)\le -\frac{P(A\cup B)}{10}+\frac{P(A\cup B)}{5}+\frac{403}{2}\Rightarrow$

$f(x)\le \frac{P(A\cup B)+2015}{10}$, για κάθε $x\in[0,1]$.

γ) $P(B)=\frac{3}{5}\Rightarrow P(B')=\frac{2}{5}$. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{1}{5},1\right]$ θα ισχύει: $f\left(\frac{1}{5}\right)>f\left(\frac{2}{5}\right)$ δηλαδή

$f(P(A))>f(P(B'))$ (1). Επίσης:

$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=$

$\cancel{P(A)}+P(B')-\cancel{P(A)}+\cancel{P(A\cap B)}=P(B')$. Άρα:

$P(A\cup B')=P(B')\Rightarrow f(P(A\cup B'))=f(P(B'))$ (2)

Επίσης:

$B'\subseteq A'\cup B'=(A\cap B)'=\Omega\Rightarrow P(B')\le P(\Omega)=1\Rightarrow$

$f(P(B'))\ge f(P(A'\cup B'))=f(P(\Omega))=f(1)$ (3)

Από τις σχέσεις (1), (2) και (3) προκύπτει:

$f(P(A'\cup B'))\le f(P(B'))=f(P(A\cup B'))<f(P(A))$

Οπότε η διάμεσος είναι:

$\delta=\frac{2f(P(B'))}{2}=f(P(B'))=f\left(\frac{2}{5}\right)=$

$-\frac{5}{2}P(A\cup B)\left(\frac{2}{5}\right)^2+P(A\cup B)\frac{2}{5}+\frac{403}{2}=$

$-\frac{2}{5}P(A\cup B)+\frac{2}{5}P(A\cup B)+\frac{403}{2}=\frac{403}{2}$

Άσκηση 10

Έστω δειγματικός χώρος Ω με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα όπου $\Omega=\{1,2,3,...,50\}$ και η συνάρτηση $f(x)=x^2-mx+4,\ m\in\Omega$ και $x\in R$

Επιλέγουμε τα παρακάτω ενδεχόμενα:

$A=\{m\in\Omega\,/\,m:\text{πολλαπλασιο του }4\}$

$B=\{m\in\Omega\,/\,\text{η }f(x)\text{ να εχει πραγματικες ριζες}\}$

$\Gamma=\left\{m\in\Omega\,/\,\text{το οριο}:\lim\limits_{x\to m}\frac{x^2-mx}{\sqrt{x}-\sqrt{m}}\le 30\sqrt{m}\right\}$

α) Να βρεθούν (με αναγραφή) τα ενδεχόμενα Α,Β,Γ

β) Να βρεθούν οι πιθανότητες $P(A),P(B),P(\Gamma)$ και $P(A\cap B)$

Γ) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες: $P(A\cup B),P(A\cup B'),P(B-A')$

Λύση

α) Για το ενδεχόμενο Α: $m\in\Omega$ και $m=$ πολ4 άρα $A=\{4,8,12,16,20,24,28,32,36,40,44,48\}$ και είναι $N(A)=12$

Για το ενδεχόμενο Β: πρέπει και αρκεί $\Delta\ge 0$. όμως: $\Delta\ge 0\Leftrightarrow m^2-4\cdot1\cdot4\ge 0\Leftrightarrow m^2\ge 16\Leftrightarrow m\le -4$ (απορρίπτονται) ή άρα $m\ge 4$. Άρα: $B=\{4,5,6,...,50\}$ και είναι $N(B)=47$.

Για το ενδεχόμενο Γ: $m\in\Omega$ και ισχύει:

$\lim\limits_{x\to m}\frac{x^2-mx}{\sqrt{x}-\sqrt{m}}\le 30$ (1). Όμως

$\lim\limits_{x\to m}\frac{x^2-mx}{\sqrt{x}-\sqrt{m}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to m}\frac{x(x-m)(\sqrt{x}+\sqrt{m})}{(\sqrt{x}-\sqrt{m})(\sqrt{x}+\sqrt{m})}=$

$\lim\limits_{x\to m}\frac{x\,\cancel{(x-m)}(\sqrt{x}+\sqrt{m})}{\cancel{x-m}}=$

$\lim\limits_{x\to m}\frac{x(x-m)(\sqrt{x}+\sqrt{m})}{(\sqrt{x}-\sqrt{m})(\sqrt{x}+\sqrt{m})}=$

$=\lim\limits_{x\to m}x(\sqrt{x}+\sqrt{m})=m(\sqrt{m}+\sqrt{m})=2m\sqrt{m}$ έτσι από την (1) έχουμε: $2m\sqrt{m}\le 30\sqrt{m}\Rightarrow m\le 15$ άρα $\Gamma=\{1,2,3,4,...,15\}$ και είναι $N(\Gamma)=15$.

β) Από τον κλασσικό ορισμό πιθανότητας (αφού τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα) έχουμε:

$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{12}{50}=\frac{6}{25}$, $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{47}{50}$ και

$P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{15}{50}=\frac{3}{10}$. Επειδή

$A\subseteq B\Rightarrow A\cap B=A\Rightarrow P(A\cap B)=P(A)=\frac{6}{25}$

γ) $A\subseteq B\Rightarrow A\cup B=B\Rightarrow P(A\cup B)=P(B)=\frac{47}{50}$

$P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=$

$P(A)+1-P(B)-P(A)+P(A\cap B)=$

$1-\frac{47}{50}+\frac{6}{25}=1-\frac{47}{50}+\frac{6}{25}=1-\frac{35}{50}=\frac{15}{50}=\frac{3}{10}$

$P(B-A')=P\left(B\cap(A')'\right)=P(B\cap A)=0,24$

Άσκηση 11

Δίνονται οι συναρτήσεις $h(x)=xe^{-x}$ και $\varphi(x)=2016-(x+1)e^{-x}$ με $x\in R$ και k ένας θετικός πραγματικός αριθμός.

α) Να μελετηθεί η συνάρτηση $h(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

β) Να δείξετε ότι $e\cdot h(x)\le 1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$

γ) Εάν οι παρατηρήσεις ενός δείγματος μεγέθους ν ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή που έχουν μέση τιμή $\bar{x}=\varphi(0)$ και τυπική απόκλιση $s=\varphi'(k)$ και από τις παρατηρήσεις αυτές οι 8.150 ανήκουν στο διάστημα: $\left(2015-\dfrac{2k}{e^k},2015+\dfrac{k}{e^k}\right)$, τότε

i) Να αποδείξετε ότι $\bar{x}=2015$ και $s=h(k)$

ii) Να αποδείξετε ότι το μέγεθος του δείγματος είναι $\nu=10.000$

ii) Να εξετάσετε αν το μέγεθος του δείγματος είναι ομοιογενές

Λύση

α) $h'(x)=\left(xe^{-x}\right)'=(x)'e^{-x}+x\left(e^{-x}\right)'=e^{-x}-xe^{-x}$ $=(1-x)e^{-x}$

- $h'(x)=0\Leftrightarrow 1-x=0\Leftrightarrow x=1$
- $h'(x)>0\Leftrightarrow 1-x>0\Leftrightarrow x<1$
- $h'(x)<0\Leftrightarrow 1-x<0\Leftrightarrow x>1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
h'(x)	+	0	−
h(x)	↗		↘

Επομένως η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $(-\infty,1]$, και γνησιώς φθίνουσα στο διάστημα $[1,+\infty)$. Στο σημείο $x_0=1$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή την $h(1)=1\cdot e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

β) Δείξαμε ότι η $h(x)$ παρουσιάζει μέγιστο για $x=1$ άρα $h(x)\le\dfrac{1}{e}$ έτσι όντως $e\cdot h(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

.

γ) i) Είναι $\bar{x}=\varphi(0)$ άρα $\bar{x}=2016-(0+1)\cdot e^0\Rightarrow$ $\bar{x}=2016-1=2015$. Ακόμα:

$\varphi'(x)=(2016)'-\left[(x+1)e^{-x}\right]'=$

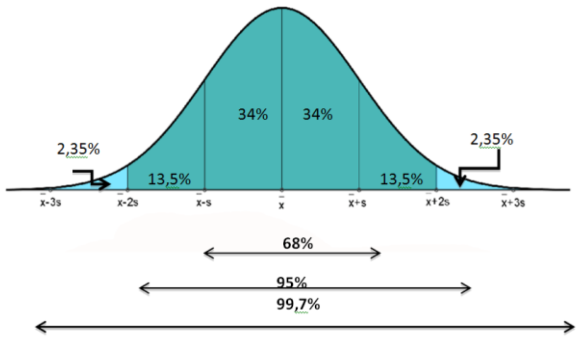
$0-\left[(x+1)'e^{-x}+(x+1)\left(e^{-x}\right)'\right]=$

$=-\left(e^{-x}+(x+1)e^{-x}(-1)\right)=-\left(e^{-x}-(x+1)e^{-x}\right)=$

$-e^{-x}(1-x-1)=xe^{-x}$, παρατηρούμε δηλαδή ότι: $\varphi'(x)=h(x)$ έτσι $s=\varphi'(k)=h(k)$ είναι:

$s=h(k)=k\cdot e^{-k}=\dfrac{k}{e^k}$.

ii) Οι παρατηρήσεις του δείγματος ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή άρα:



Έτσι αφού $\bar{x}=2015$ και $s=\dfrac{k}{e^k}$ το διάστημα $\left(2015-\dfrac{2k}{e^k},2015+\dfrac{k}{e^k}\right)$ αντιστοιχεί στο διάστημα $\left(\bar{x}-2s,\bar{x}+s\right)$, στο οποίο βρίσκεται το 81,5% των παρατηρήσεων επομένως:

$81,5\%\cdot\nu=8.150\Leftrightarrow\nu=10.000$.

iii) $CV=\dfrac{s}{\bar{x}}=\dfrac{\frac{k}{e^k}}{2015}=\dfrac{k\cdot e^{-k}}{2015}=\dfrac{h(k)}{2015}$ (1)

Δείξαμε όμως ότι $e\cdot h(x)\le 1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

άρα και για $x=k$ ισχύει: $e\cdot h(x)\le 1\Leftrightarrow h(k)\le\dfrac{1}{e}$

οπότε: $CV=\dfrac{h(k)}{2015}\le\dfrac{\frac{1}{e}}{2015}=\dfrac{1}{2015\cdot e}\le\dfrac{1}{10}$, δηλαδή $CV\%\le 10\%$, έτσι το δείγμα είναι ομοιογενές.