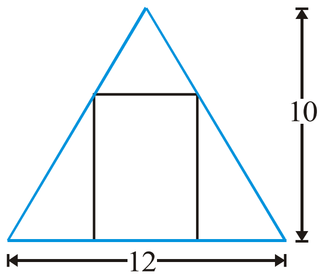
ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΜΕΓΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ – ΕΛΑΧΙΣΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

του Κώστα Βακαλόπουλου

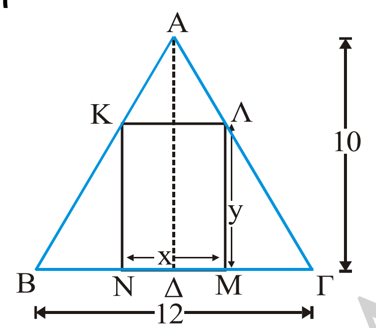
1. ΔΥΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΣΕ ΕΝΑ ΣΧΗΜΑ

α) Ποιες είναι οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου που έχει μέγιστο εμβαδόν και που μπορούμε να εγγράψουμε όπως δείχνει το σχήμα 1 μέσα σε ισοσκελές τρίγωνο με ύψος 10 cm και βάση 12 cm;



Σχ. 1

Λύση



Έστω x, y οι διαστάσεις του ορθογωνίου ($x = NM = K\Lambda$ και $y = KN = \Lambda M$).

Ζητάμε να μεγιστοποιήσουμε την παράσταση: $E = x \cdot y$, $x, y > 0$ (1).

Αν ΑΔ το ύψος του ισοσκελούς τριγώνου τότε:

$$\frac{A\Delta}{\Lambda M} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma M} \Leftrightarrow \frac{10}{y} = \frac{6}{6 - x/2} \Leftrightarrow \cdots y = \frac{60 - 5x}{6} \quad (> 0 \Leftrightarrow \cdots x < 12).$$

Άρα η (1) γίνεται:

$$\boxed{E(x) = x\frac{60 - 5x}{6}, 0 < x < 12}$$

$$E(x) = x \cdot \left(10 - \frac{5}{6}x\right) = -\frac{5}{6}x^2 + 10x.$$

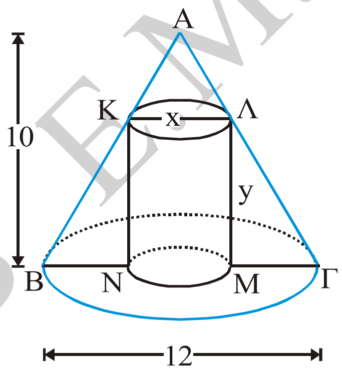
$E'(x) = -\frac{5}{3}x + 10$, $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 6$ ενώ $E'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 6$ και $E'(x) < 0 \Leftrightarrow 6 < x < 12$.

	0	6	12
$E'(x)$	+	–	
$E(x)$	↗	↘	

Άρα: Η παράσταση (1) δηλ. το εμβαδόν του ορθογωνίου μεγιστοποιείται αν $x = 6\,cm$ και $y = 5\,cm$.

β) Ποια είναι η διάμετρος της βάσης κυλίνδρου που έχει μέγιστο όγκο και που μπορούμε να εγγράψουμε όπως δείχνει το σχήμα 2 μέσα σε κώνο ύψους 10 cm και βάση με διάμετρο 12 cm;

Λύση



Σχ. 2

Μια κάθετη τομή του σχήματος 2 έχουμε στο σχήμα 1 της προηγούμενης άσκησης.

Έστω x η διάμετρος της βάσης και y το ύψος του κυλίνδρου.

Ζητάμε να μεγιστοποιήσουμε την παράσταση:

$$V = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot y, \ x, y > 0 \ (2).$$

Άρα: $\boxed{V(x) = \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot \frac{60 - 5x}{6}, \ 0 < x < 12}$

$$V(x) = \pi \cdot \frac{x^2}{4}\left(10 - \frac{5}{6}x\right) = \cdots = -\frac{5}{2}\pi\left(\frac{1}{12}x^3 - x^2\right)$$

$$V'(x) = -\frac{5}{2}\pi\left(\frac{1}{4}x^2 - 2x\right), \quad V'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 8$$

ενώ $V'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 8$ και

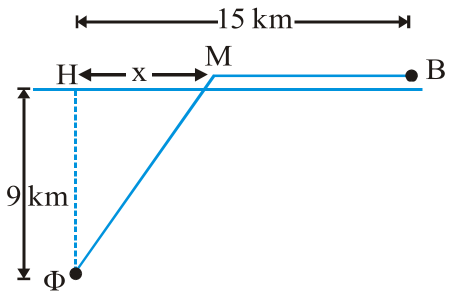
$$V'(x) < 0 \Leftrightarrow 8 < x < 12.$$

	0	8	12
$V'(x)$	+	–	
$V(x)$	↗	↘	

Άρα: Η παράσταση (2) δηλ. ο όγκος του κυλίνδρου μεγιστοποιείται αν $x = 8\,cm$ και $y = \frac{10}{3}\,cm$.

2. Ο ΦΥΛΑΚΑΣ ΤΟΥ ΦΑΡΟΥ

Για λόγους έκτακτης ανάγκης ο φύλακας του φάρου (σημείο Φ) πρέπει να φτάσει το συντομότερο δυνατόν στο σπίτι που βρίσκεται στην όχθη (σημείο Β). Γι' αυτό μετακινείται με κανό με ταχύτητα $4\ \text{km/h}$ και με τα πόδια στη συνέχεια με ταχύτητα $5\,\text{km/h}$. Πού πρέπει να προσαράξει ώστε ο χρόνος της διαδρομής να είναι ο ελάχιστος;



(***Σημείωση:*** *Η ακτή είναι ευθύγραμμη και η παρέκκλιση του ρεύματος του νερού μηδενική*).

Λύση

Ο χρόνος που χρειάζεται για να διανύσει την απόσταση ΦΜ (με το κανό) είναι: $\Phi M = \frac{1}{4}\sqrt{x^2+81}$ και την απόσταση ΜΒ (με τα πόδια): $MB = \frac{1}{5}(15-x)$ όπου x η απόσταση του σημείου προσάραξης από το Η (η προβολή του φάρου στην ακτή) με $0 \le x \le 15$.

Το πρόβλημα ανάγεται στην εύρεση του ελαχίστου της συνάρτησης:

$f(x) = \frac{1}{4}\sqrt{x^2+81} + \frac{1}{5}(15-x)$ στο διάστημα $[0,15]$.

$$f'(x) = \frac{x}{4\sqrt{x^2+81}} - \frac{1}{5} = \frac{5x - 4\sqrt{x^2+81}}{20\sqrt{x^2+81}} =$$
$$= \frac{25x^2 - 16\left(x^2+81\right)}{20\sqrt{x^2+81}\left(5x+4\sqrt{x^2+81}\right)}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 25x^2 - 16\left(x^2+81\right) = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 9(x-12)(x+12) = 0 \Leftrightarrow x = -12$$

(απορ.) ή $x = 12$.

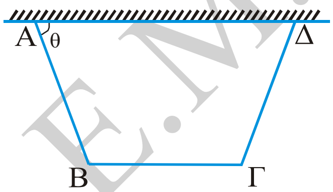
Ενώ $f'(x) > 0 \Leftrightarrow 12 < x \le 15$ και $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 \le x < 12$.

x	0		12		15
f′(x)		−	0	+	
f(x)	5.25	↘	4.35	↗	4.37

Άρα: Το ελάχιστο της συνάρτησης παρουσιάζεται για $x = 12$ δηλ. ο φύλακας πρέπει να προσαράξει με το κανό στο σημείο που απέχει 12 Km από το σημείο Η.

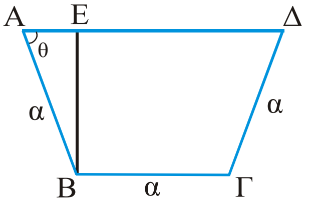
3. ΤΟ ΑΡΘΡΩΤΟ ΤΡΑΠΕΖΙΟ

Το τραπέζιο στο σχήμα είναι αρθρωτό με $AB = B\Gamma = \Gamma\Delta = \alpha$ $(\alpha > 0$ δοσμένο). Για ποια τιμή της γωνίας θ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο;



Λύση

$$(AB\Gamma\Delta) = \frac{1}{2}(A\Delta + B\Gamma)\cdot BE =$$
$$= \frac{1}{2}\left[(B\Gamma + 2\cdot AE) + B\Gamma\right]\cdot BE =$$
$$\frac{1}{\cancel{2}}\cdot\cancel{2}\,(B\Gamma + AE)\cdot BE \underset{\eta\mu\theta=\frac{BE}{\alpha}}{\overset{\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{AE}{\alpha}}{=\!=\!=}} (\alpha + \alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\alpha\cdot\eta\mu\theta =$$
$$= \alpha^2\cdot(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\eta\mu\theta\,.$$



Έστω $f(\theta) = \alpha^2(1+\sigma\upsilon\nu\theta)\cdot\eta\mu\theta$, $0 < \theta < 2\pi/3$

$f'(\theta) = \alpha^2\left(2\sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu\theta - 1\right)$,

$f'(\theta) > 0 \Leftrightarrow \cancel{\sigma\upsilon\nu\theta < -1}$ ή $\sigma\upsilon\nu\theta > \frac{1}{2}$ ενώ $f'(\theta) < 0 \Leftrightarrow 0 < \sigma\upsilon\nu\theta < \frac{1}{2}$. Δηλ. $f'(\theta) < 0$ αν $\frac{\pi}{3} < \theta < \frac{2\pi}{3}$ και $f'(\theta) > 0$ αν $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$.

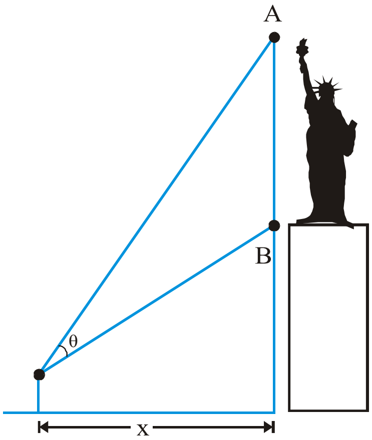
	0		π/3		2π/3
f′(θ)		+	0	−	
f(θ)		↗		↘	

Άρα: Το τραπέζιο έχει μέγιστο εμβαδόν αν $\theta = \frac{\pi}{3}$.

4. ΤΟ ΑΓΑΛΜΑ ΤΗΣ ΕΛΕΥΘΕΡΙΑΣ

Σε ποια απόσταση x πρέπει να τοποθετήσουμε τη φωτογραφική μηχανή ώστε να πάρουμε φωτογραφία του αγάλματος υπό τη μεγαλύτερη δυνατή γωνία;

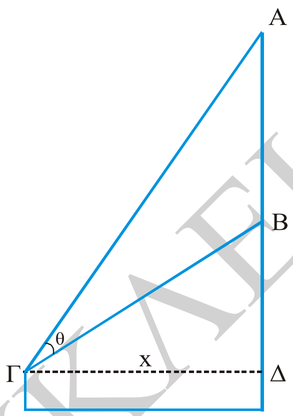
Η γωνία $\theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.



Δίνονται: Η φωτογραφική μηχανή είναι 1,5 m από το έδαφος.

Η βάση στήριξης του αγάλματος έχει 45 m ύψος και το άγαλμα επίσης 45 m ύψος.

Λύση



$$\left.\begin{aligned}\varepsilon\varphi \mathrm{A\Gamma\Delta} &= \frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Gamma\Delta}}\\ \varepsilon\varphi \mathrm{B\Gamma\Delta} &= \frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{\Gamma\Delta}}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \varepsilon\varphi\theta = \varepsilon\varphi\left(\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta - \mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta\right) =$$

$$\frac{\varepsilon\varphi\left(\mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta\right) - \varepsilon\varphi\left(\mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta\right)}{1 + \varepsilon\varphi \mathrm{A}\hat{\Gamma}\Delta \cdot \varepsilon\varphi \mathrm{B}\hat{\Gamma}\Delta} = \frac{\frac{\mathrm{A\Delta}}{\mathrm{\Gamma\Delta}} - \frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{\Gamma\Delta}}}{1 + \frac{\mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{\Gamma\Delta}^2}} =$$

$$\frac{(\mathrm{A\Delta} - \mathrm{B\Delta})\mathrm{\Gamma\Delta}}{\mathrm{\Gamma\Delta}^2 + \mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{B\Delta}} = \frac{\mathrm{AB}\cdot\mathrm{\Gamma\Delta}}{\mathrm{\Gamma\Delta}^2 + \mathrm{A\Delta}\cdot\mathrm{B\Delta}} = \frac{45x}{x^2 + 3849{,}75}.$$

Άρα: $\varepsilon\varphi\theta = \dfrac{45x}{x^2 + 3849{,}75}$ (1).

Επειδή η συνάρτηση της εφαπτομένης στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ είναι γνησίως αύξουσα η γωνία θ γίνεται μέγιστη όταν η εφθ γίνεται μέγιστη.

Αναζητούμε την τιμή του x για την οποία η παράσταση (1) γίνεται μέγιστη.

Θεωρούμε: $f(x) = \dfrac{45x}{x^2 + 3849{,}75}$, $x > 0$.

$$f'(x) = \frac{45\left(-x^2 + 3849{,}75\right)}{\left(x^2 + 3849{,}75\right)^2},$$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{3849{,}75} = \pm 62{,}04$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 62{,}04$ και

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 62{,}04$.

x	0	62,04	+∞
f′(x)	+	0	−
f(x)	↗		↘

Άρα: Πρέπει να τοποθετήσουμε τη μηχανή σε απόσταση 62,04 m από τη βάση στήριξης του αγάλματος ώστε να πάρουμε φωτογραφία με τη μεγαλύτερη δυνατή γωνία.

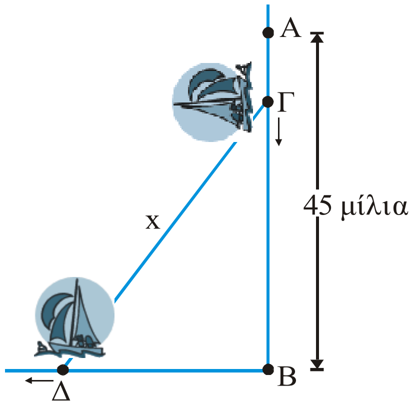
5. ΤΑ ΠΛΟΙΑ

Τη χρονική στιγμή 0 h το πλοίο Α βρίσκεται 45 μίλια βόρεια του πλοίου Β. Το πλοίο Α κατευθύνεται νότια με ταχύτητα 9 μίλια/h και το πλοίο Β απομακρύνεται δυτικά με ταχύτητα 12 μίλια/h.

Αν ο ασύρματος του πλοίου Α έχει εμβέλεια 40 μίλια θα μπορέσει να επικοινωνήσει με το πλοίο Β;

Λύση

Έχουμε $\Delta\Gamma^2 = \Gamma B^2 + B\Delta^2 = (45 - 9t)^2 + (12t)^2$, $t > 0$.



Άρα: Η απόσταση των δύο πλοίων δίνεται από τη συνάρτηση:

$$x = f(t) = \sqrt{(45 - 9t)^2 + (12t)^2} = \sqrt{[9(5 - t)]^2 + (12t)^2}$$

, $t > 0$.

Αναζητούμε το ελάχιστο της f και θα το βρούμε βρίσκοντας το ελάχιστο της συνάρτησης $g(t)=81(5-t)^2+144t^2$, $t>0$.

Έχουμε: $g'(t)=450t-810$, $t>0$, $g'(t)=0 \Leftrightarrow t=1{,}8$, $g'(t)>0$ για $t>1{,}8$ και $g'(t)<0$ για $t<1{,}8$.

t	0	$1{,}8$	$+\infty$
$g'(t)$	$-$	0	$+$
$g(t)$	$\searrow$		$\nearrow$

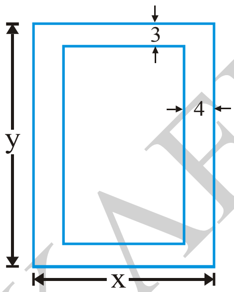
Άρα: Η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο για $t=1{,}8$, δηλ. η απόσταση θα γίνει ελάχιστη σε 1,8 h.

Η ελάχιστη απόσταση είναι $f(1{,}8)=36<40$ οπότε το πλοίο Α κάποια χρονική στιγμή (λιγότερο από 1,8 h) θα επικοινωνήσει με το πλοίο Β.

6. ΤΥΠΩΜΕΝΗ ΣΕΛΙΔΑ

Ένα κείμενο πρέπει να γραφτεί και να τυπωθεί σε σχήμα ορθογωνίου με εμβαδόν 432 cm². Τα περιθώρια του χαρτιού τα ορίζουμε άνω και κάτω 3 cm το καθένα και στα πλάγια 4 cm το καθένα. Σε τι διαστάσεις χαρτιού πρέπει να γράψουμε ώστε να έχουμε το ελάχιστο δυνατό κόστος;

Λύση



Το ελάχιστο κόστος θα επιτευχθεί αν το εμβαδόν του χαρτιού γίνει ελάχιστο!

Έστω x και y οι διαστάσεις του (ορθογωνίου) χαρτιού. Το ορθογώνιο με το κείμενο θα έχει διαστάσεις $x-8$ και $y-6$ αντίστοιχα.

Όμως $(x-8)(y-6)=432 \Leftrightarrow y-6=\dfrac{432}{x-8} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \boxed{y=\frac{432}{x-8}+6}.$$

Το εμβαδόν του χαρτιού είναι:

$x\cdot y = x\cdot\dfrac{432}{x-8}+6x$ ($x-8>0 \Leftrightarrow x>8$ και $y-6>0 \Leftrightarrow y>6$).

Άρα ζητάμε να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{432x}{x-8}+6x$, $x>8$.

Έχουμε: $f'(x)=6\cdot\dfrac{x^2-16x-512}{(x-8)^2}$,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=32$ ή $x=-16$ (απορρίπτεται).

$f'(x)>0 \Leftrightarrow x>32$ και $f'(x)<0 \Leftrightarrow x<32$.

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει στο 32. Ελάχιστο (ολικό)

Άρα: Για $x=32$ (και $y=24$) η σελίδα (το χαρτί) έχει το λιγότερο εμβαδόν δηλ. το λιγότερο κόστος.