Τάξη: Β΄

Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

Κώστα Βακαλόπουλου, Χάρη Τσουλουχά

Α. ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΜΕΤΑΒΟΛΗ

Πολλά φαινόμενα της πραγματικότητας συνδέονται με την έννοια της εκθετικής μεταβολής. Θα αναφέρουμε λίγα τέτοια προβλήματα για κατανόηση και εμπέδωση της έννοιας αυτής. Η συνάρτηση που περιγράφει αυτή τη μεταβολή έχει τη μορφή: $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$, όπου $Q(t)$ ποσότητα σε χρόνο t, Q_0 η αρχική ποσότητα, c σταθερά και t ο χρόνος.

Πρόβλημα 1

Ο αριθμός των βακτηρίων σε μια καλλιέργεια που ακολουθεί την εκθετική μεταβολή και διπλασιάζεται κάθε 4 ώρες. Στην αρχή της παρατήρησης έχουμε 3000 βακτήρια.

Α) Δείξτε ότι η εξέλιξη της καλλιέργειας δίνεται από τον τύπο: $Q(t)=3000\cdot 2^{\frac{t}{4}}$, όπου $Q(t)$ ο αριθμός των βακτηρίων και t οι ώρες μετά την έναρξη.

Β) Πόσα βακτήρια έχουμε 10 ώρες μετά;

Γ) Πόσα βακτήρια είχαμε 10 ώρες πριν;

Δ) Κάτω από ιδιαίτερα ευμενείς συνθήκες τα βακτήρια διπλασιάζονται κάθε 20 λεπτά. Σχηματίστε μια εξίσωση που θα περιγράφει την εξέλιξη της καλλιέργειας και υπολογίστε τον αριθμό των βακτηρίων 10 ώρες μετά.

Λύση

Α) Σύμφωνα με την εκθετική μεταβολή θα ισχύει: $Q(t)=3000\cdot e^{ct}$ (1). Όμως στο τέλος της 4ης ώρας θα είναι: $Q(4)=6000$. Άρα: $6000=3000\cdot e^{4c}\Leftrightarrow (e^c)^4=2\Leftrightarrow e^c=2^{\frac{1}{4}}$. Άρα ο τύπος (1) γίνεται:

$$Q(t)=3000\cdot (e^c)^t\Rightarrow Q(t)=3000\cdot 2^{\frac{t}{4}}.$$

Β) $Q(10)=3000\cdot 2^{\frac{10}{4}}=3000\sqrt{32}\simeq 16.970$

Γ) Έστω Q_0 τα βακτήρια που είχαμε 10 ώρες πριν. Τότε $Q(10)=3000$. Οπότε: $Q_0\cdot 2^{\frac{10}{4}}=3000\Leftrightarrow Q_0=3000\div\sqrt{32}\simeq 530$

Δ) Αφού διπλασιάζονται κάθε 20 λεπτά θα ισχύει: $Q\left(\frac{1}{3}\right)=6000$. Άρα: $3000\cdot e^{\frac{c}{3}}=6000$ $\Leftrightarrow (e^c)^{\frac{1}{3}}=2\Leftrightarrow e^c=8$. Άρα: $Q(t)=3000\cdot 8^t$.

Οπότε: $Q(10)=3000\cdot 8^{10}=3,2\cdot 10^{12}$ βακτήρια.

Πρόβλημα 2

Ο χρόνος ημιζωής των ραδιενεργών ισοτόπων αζώτου με μαζικό αριθμό 13 ανέρχεται σε 10 λεπτά. Στην αρχή της παρατήρησης έχουμε N_0 αδιάσπαστους πυρήνες.

Α) Να δείξετε ότι η καταστροφή των πυρήνων περιγράφεται από τον τύπο: $N(t)=N_0\cdot 0,5^{6t}$, όπου t σε ώρες.

Β) Τι ποσοστό πυρήνων δεν έχουν διασπαστεί μισή ώρα μετά την έναρξη;

Γ) Τι ποσοστό πυρήνων έχει διασπαστεί μέσα σε μια ώρα από την έναρξη;

Λύση

Α) Από την υπόθεση έχουμε: $N\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{N_0}{2}$.

Άρα: $\cancel{N_0}\cdot e^{\frac{c}{6}}=\frac{\cancel{N_0}}{2}\Rightarrow (e^c)^{\frac{1}{6}}=\frac{1}{2}\Rightarrow e^c=0,5^6$.

Άρα: $N(t)=N_0\cdot (e^c)^t=N_0\cdot (0,5^6)^t=N_0\cdot 0,5^{6t}$

Β) $N\left(\frac{1}{2}\right)=N_0\cdot (0,5)^{\frac{6}{2}}=N_0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{N_0}{8}$.

Έτσι: $\dfrac{\cancel{N_0}-\frac{\cancel{N_0}}{8}}{\cancel{N_0}}\cdot 100=\frac{7}{8}\cdot 100=87,5$ Άρα:

Το ποσοστό που δεν έχει διασπαστεί μισή ώρα μετά την έναρξη είναι: 87,5% .

Γ) $N(1)=N_0\cdot (0,5)^6=N_0\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{N_0}{64}$. Έτσι:

$\dfrac{\frac{N_0}{64}}{N_0}\cdot 100=1,5625$. Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι 1,5625%

Β. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Οι εκθετικές και οι λογαριθμικές εξισώσεις και συστήματα επιλύονται εφαρμόζοντας την ιδιότητα της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης σύμφωνα με την οποία ισχύει:

- Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

  $\alpha^{x_1} = \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, $\alpha > 0$ (1)
- Για κάθε $x_1, x_2 > 0$,

  $\log_\alpha x_1 = \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$, $0 < \alpha \neq 1$ (2)

Άσκηση 1

Να λυθούν οι εξισώσεις:

1. $\mathbf{2 \cdot 8^{2x} = 8 \cdot 2^{8x}}$
2. $\mathbf{4 - 2^x = 4100 - 5 \cdot 2^x}$
3. $\mathbf{81 \cdot 4^{x+3} = 256 \cdot 3^{4x}}$
4. $\mathbf{4\left(3^{2x+1}\right) + 17 \cdot 3^x - 7 = 0}$
5. $\mathbf{3^{x+\frac{4}{3}} - 2^{3x} = 2\left(3^{x+\frac{1}{3}} + 2^{3x-1}\right)}$
6. $\mathbf{\sqrt{3^{8x-2}} + 2^{4x} = \sqrt{2^{8x+2}} - 3^{4x-2}}$
7. $\mathbf{3^{x-2} = 7 \cdot 5^{2x}}$
8. $\mathbf{\ln\left(3^x + 3 \cdot 2^x\right) + \ln 27 = x \cdot \ln 2 + \ln 89}$
9. $\mathbf{10^{\ln x} + 10^{2-\ln x} = 101}$
10. $\mathbf{\log\left(\log\left(x^2 - 5x + 16\right)\right) = 0}$

Λύση

Τα σύνολα ορισμού των εξισώσεων 1-8 είναι το $\mathbb{R}$. Οπότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε:

1) $2 \cdot 8^{2x} = 8 \cdot 2^{8x} \Leftrightarrow 2 \cdot \left(2^3\right)^{2x} = 2^3 \cdot 2^{8x} \Leftrightarrow$

$2 \cdot 2^{6x} = 2^3 \cdot 2^{8x} \Leftrightarrow 2^{1+6x} = 2^{3+8x} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 1 + 6x = 3 + 8x$
$\Leftrightarrow 2x = -2 \Leftrightarrow x = -1$

2) $4 - 2^x = 4100 - 5 \cdot 2^x \Leftrightarrow 4 \cdot 2^x = 4196 \Leftrightarrow$

$2^x = 1024 \Leftrightarrow 2^x = 2^{10} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x = 10$

3) $81 \cdot 4^{x+3} = 256 \cdot 3^{4x} \Leftrightarrow \dfrac{4^x \cdot 4^3}{\left(3^4\right)^x} = \dfrac{256}{81} \Leftrightarrow$

$$\frac{64 \cdot 4^x}{81^x} = \frac{256}{81} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{81}\right)^x = \frac{256}{64 \cdot 81} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{81}\right)^x = \frac{4}{81} \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$
$x = 1$

4) $4\left(3^{2x+1}\right) + 17 \cdot 3^x - 7 = 0 \Leftrightarrow$

$$4 \cdot \left(3^x\right)^2 \cdot 3 + 17 \cdot 3^x - 7 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = y \\ y > 0 \\ 12 \cdot y^2 + 17 \cdot y - 7 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = y \\ y > 0 \\ \left(y = \frac{1}{3} \text{ ή } y = -\frac{7}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow 3^x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3^x = 3^{-1} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x = -1$$

5) $3^{x+\frac{4}{3}} - 2^{3x} = 2\left(3^{x+\frac{1}{3}} + 2^{3x-1}\right) \Leftrightarrow$

$3^x \cdot 3^{\frac{4}{3}} - \left(2^3\right)^x = 2 \cdot 3^x \cdot 3^{\frac{1}{3}} + \left(2^3\right)^x \Leftrightarrow$

$3^x\left(\sqrt[3]{3^4} - 2 \cdot \sqrt[3]{3}\right) = 2 \cdot 8^x \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{8}\right)^x = \dfrac{2}{\sqrt[3]{3}} \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{3}{8}\right)^x = \left(\dfrac{8}{3}\right)^{\frac{1}{3}} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{8}\right)^x = \left(\dfrac{3}{8}\right)^{-\frac{1}{3}} \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x = -\dfrac{1}{3}$

6) $\sqrt{3^{8x-2}} + 2^{4x} = \sqrt{2^{8x+2}} - 3^{4x-2} \Leftrightarrow$

$3^{\frac{8x-2}{2}} + 2^{4x} = 2^{\frac{8x+2}{2}} - 3^{4x-2} \Leftrightarrow$

$3^{4x-1} + 2^{4x} = 2^{4x+1} - 3^{4x-2} \Leftrightarrow$

$\dfrac{3^{4x}}{3} + \dfrac{3^{4x}}{9} = 2 \cdot 2^{4x} - 2^{4x} \Leftrightarrow \dfrac{4}{9} \cdot 3^{4x} = 2^{4x} \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{4x} = \dfrac{9}{4} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{4x} = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 4x = 2 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

7) $3^{x-2} = 7 \cdot 5^{2x} \Leftrightarrow \ln 3^{x-2} \Leftrightarrow \ln\left(7 \cdot 5^{2x}\right) \Leftrightarrow$

$(x-2)\ln 3 = \ln 7 + 2x \ln 5 \Leftrightarrow x\left(\ln 3 - 2\ln 5\right) =$

$\ln 7 + 2\ln 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 7 + 2\ln 3}{\ln 3 - 2\ln 5} \simeq 1{,}95$

8) $\ln\left(3^x + 3 \cdot 2^x\right) + \ln 27 = x \cdot \ln 2 + \ln 89 \Leftrightarrow$

$\ln\left(3^x + 3 \cdot 2^x\right) - \ln 2^x = \ln 89 - \ln 27 \Leftrightarrow$

$\ln\left(\dfrac{3^x + 3 \cdot 2^x}{2^x}\right) = \ln\dfrac{89}{27} \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x + 3 = \dfrac{89}{27} \Leftrightarrow$

$\left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \dfrac{8}{27} \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{-3} \Leftrightarrow x = -3$

9) Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το $(0, +\infty)$. Οπότε για κάθε $x \in (0, +\infty)$ έχουμε:

$10^{\ln x} + 10^{2-\ln x} = 101 \Leftrightarrow 10^{\ln x} + \dfrac{100}{10^{\ln x}} = 101 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10^{\ln x} = y \\ y > 0 \\ y^2 - 101y + 100 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10^{\ln x} = y \\ y > 0 \\ y = 100 \text{ ή } y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\left(10^{\ln x} = 100 \text{ ή } 10^{\ln x} = 1\right) \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

$\left(\ln x = 2 \text{ ή } \ln x = 0\right) \Leftrightarrow \left(x = e^2 \text{ ή } x = 1\right)$

10) Για να ανήκει ο αριθμός x στο σύνολο ορισμού της εξίσωσης πρέπει και αρκεί: $x^2-5x+16>0$ και $\log\left(x^2-5x+16\right)>0$.

Όμως: $x^2-5x+16>0$ ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ενώ $\log\left(x^2-5x+16\right)>0 \Leftrightarrow x^2-5x+16>1 \Leftrightarrow$

$x^2-5x+15>0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το $\mathbb{R}$.
Οπότε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$$\log\left(\log\left(x^2-5x+16\right)\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\log\left(\log\left(x^2-5x+16\right)\right)=\log 1 \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$$

$$\log\left(x^2-5x+16\right)=1 \Leftrightarrow \log\left(x^2-5x+16\right)=\log 10$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow} x^2-5x+16=10 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow$$
$$\left(x=2 \text{ ή } x=3\right)$$

Άσκηση 2

Να λυθεί η εξίσωση: $\left(x^2+2x-2\right)^{x^2-2017x}=1$

Λύση

Για να ανήκει ένας πραγματικός αριθμός x στο σύνολο ορισμού της εξίσωσης πρέπει και αρκεί: $x^2+2x-2>0$ ή ($x^2+2x-2=0$ και $x^2-2017x\neq 0$) ή ($x^2+2x-2<0$ και $x^2-2017x$: ακέραιος).

1η περίπτωση: Αν $x^2+2x-2>0$ τότε διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

1η υποπερίπτωση: Αν $x^2+2x-2=1$ δηλαδή $x^2+2x-3=0$ δηλαδή $x=1$ ή $x=-3$, τότε οι αριθμοί αυτοί είναι λύσεις της εξίσωσης.

2η υποπερίπτωση: Αν $x^2+2x-2\neq 1$ δηλαδή $x\neq 1$ και $x\neq 3$ τότε:

$$\left(x^2+2x-2\right)^{x^2-2017x}=\left(x^2+2x-2\right)^0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$x^2-2017x=0 \Leftrightarrow x\left(x-2017\right)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2017$. Η τιμή $x=0$ απορρίπτεται αφού για $x=0$, $0^2+2\cdot 0-2<0$.

2η περίπτωση: Αν $x^2+2x-2=0$ τότε $x^2-2017x\neq 0$ οπότε η εξίσωση δεν επαληθεύεται.

3η περίπτωση: Αν $x^2+2x-2<0$ τότε διακρίνουμε δύο υποπεριπτώσεις:

1η υποπερίπτωση: Αν $x^2+2x-2=-1$ δηλαδή $x^2+2x-1=0$ δηλαδή $x=-1\pm\sqrt{2}$ τότε οι αριθμοί αυτοί θα είναι λύσεις της εξίσωσης αν $x^2-2017x$ είναι άρτιος αριθμός, που δεν ισχύει. Άρα οι αριθμοί $x=-1\pm\sqrt{2}$ δεν είναι λύσεις της εξίσωσης.

2η υποπερίπτωση: Αν $x^2+2x-2\neq -1$ δηλαδή $x\neq -1+\sqrt{2}$ και $x\neq -1-\sqrt{2}$ τότε η εξίσωση θα έχει λύσεις αν $x^2-2017x=0$ δηλαδή $x=0$ ή $x=2017$. Η τιμή $x=2017$ απορρίπτεται αφού για $x=2017$, $2017^2+2\cdot 2017-2>0$

Άρα το σύνολο λύσεων της εξίσωσης είναι: $L=\{-3,0,1,2017\}$

Άσκηση 3

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x)=3x^3-8x^2-x+10$

A) Να λυθεί η εξίσωση: $P(x)=0$

B) Να λυθεί η εξίσωση:

$$3\left(\ln x\right)^2-8\ln x=\frac{\ln x-10}{\ln x} \qquad (1)$$

Λύση

A) Με τη βοήθεια του σχήματος Horner

3	–8	–1	10	$\rho=2$
↓	6	–4	–10	
3	–2	–5	0	

το πολυώνυμο $P(x)$ γράφεται:

$P(x)=\left(x-2\right)\left(3x^2-2x-5\right)$. Οπότε :

$$P(x)=0 \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(3x^2-2x-5\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left(x-2=0 \text{ ή } 3x^2-2x-5=0\right) \Leftrightarrow \left(x=2 \text{ ή } x=\frac{5}{3} \text{ ή } x=-\frac{1}{3}\right).$$

B) Για να ανήκει ο αριθμός x στο σύνολο ορισμού της εξίσωσης πρέπει και αρκεί: $x>0$ και $\ln x\neq 0$ δηλαδή $x>0$ και $x\neq 1$. Άρα το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το: $(0,1)\cup(1,+\infty)$.
Οπότε για κάθε $x\in(0,1)\cup(1,+\infty)$ έχουμε:

$$3\left(\ln x\right)^2-8\ln x=\frac{\ln x-10}{\ln x} \Leftrightarrow$$

$$3\ln^3 x-8\ln^2 x-\ln x+10=0 \Leftrightarrow P\left(\ln x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\ln x=2 \text{ ή } \ln x=\frac{5}{3} \text{ ή } \ln x=-\frac{1}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x=e^2 \text{ ή } x=e^{\frac{5}{3}}=\sqrt[3]{e^5}=e\sqrt[3]{e^2} \text{ ή } x=e^{-\frac{1}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{e}}\right)$$

Άσκηση 4

Να βρεθούν οι θετικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, γ αν είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής

προόδου και ισχύει: $\begin{cases} \ln\alpha+\ln\gamma=\ln\beta+\ln 2 \quad (1) \\ \alpha+\beta+\gamma=7 \quad (2) \end{cases}$

Λύση

Αφού οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου θα ισχύει: $\beta^2=\alpha\gamma$ (3).

Από τη σχέση (3) έχουμε: $\ln\beta^2=\ln\alpha\gamma \Rightarrow$ $2\ln\beta=\ln\alpha+\ln\gamma$ (3). Από τις ισότητες (1) και (3) έχουμε: $2\ln\beta=\ln\beta+\ln 2 \Rightarrow \ln\beta=\ln 2 \Rightarrow \beta=2$ (4)

Επίσης: Από ισότητες: (2), (3) και (4) έχουμε: $\alpha\gamma=4$ και $\alpha+\gamma=7-2=5$. Άρα οι αριθμοί α και γ θα είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2-5x+4=0$ δηλαδή $\alpha=1$ και $\gamma=4$ ή $\alpha=4$ και $\gamma=1$.

Άσκηση 5

Να λυθούν τα συστήματα:

Α) $\begin{cases} \ln x^2+\ln y^2=2\ln 6 \\ e^x=\dfrac{1}{e^{1+y}} \end{cases}$, **Β)** $\begin{cases} x^{\ln y}+y^{\ln x}=2e^3 \\ \ln\sqrt{xy}=2 \end{cases}$

Λύση

Α) Για να ανήκει ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) στο σύνολο ορισμού του συστήματος αυτού πρέπει και αρκεί να είναι: $x\neq 0$ και $y\neq 0$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} \ln x^2+\ln y^2=2\ln 6 \\ e^x=\dfrac{1}{e^{1+y}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(xy)^2=\ln 6^2 \\ e^x=e^{-1-y} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (xy)^2=36 \\ x=-1-y \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{cases} xy=6 \\ x=-1-y \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} xy=-6 \\ x=-1-y \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{cases} (-1-y)y=6 \\ x=-1-y \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} (-1-y)y=-6 \\ x=-1-y \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\cancel{\begin{cases} y^2+y+6=0 \\ x=-1-y \end{cases}} \text{ ή } \begin{cases} y^2+y-6=0 \\ x=-1-y \end{cases} \right) \Leftrightarrow$$

$$\left(\begin{cases} y=-3 \\ x=2 \end{cases} \text{ ή } \begin{cases} y=2 \\ x=-3 \end{cases} \right) \Leftrightarrow (x,y)=(2,-3) \text{ ή } (-3,2)$$

Σημείωση

Στη λύση του παραπάνω συστήματος προσέξτε ότι: $\ln(xy)^2\neq 2\ln xy$ αφού δεν γνωρίζουμε αν $x\cdot y>0$.

Β) Για να ανήκει ένα ζεύγος πραγματικών αριθμών (x,y) στο σύνολο ορισμού του συστήματος αυτού πρέπει και αρκεί να είναι: $x>0$ και $y>0$. Επίσης ισχύει: $x^{\ln y}=y^{\ln x}$ για κάθε $x,y>0$. Πράγματι για κάθε $x,y>0$ ισχύει:

$\ln y\cdot\ln x=\ln x\cdot\ln y \Rightarrow \ln\left(x^{\ln y}\right)=\ln\left(y^{\ln x}\right) \Rightarrow$ $x^{\ln y}=y^{\ln x}$. Έτσι έχουμε:

$$\begin{cases} x^{\ln y}+y^{\ln x}=2e^3 \\ \ln\sqrt{xy}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\ln y}+y^{\ln x}=2e^3 \\ \dfrac{1}{2}\ln xy=2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2x^{\ln y}=2e^3 \\ \ln xy=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^{\ln y}=e^3 \\ \ln x+\ln y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln\left(x^{\ln y}\right)=\ln e^3 \\ \ln x+\ln y=4 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln y\cdot\ln x=3 \\ \ln x+\ln y=4 \end{cases}$. Οι αριθμοί: $\ln x$ και $\ln y$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2-4x+3=0$ δηλαδή 1 ή 3. Άρα:

$(\ln x=1 \quad \text{και} \quad \ln y=3)$ ή $(\ln x=3 \quad \text{και} \quad \ln y=1)$

δηλαδή: $(x,y)=\left(e,e^3\right)$ ή $\left(e^3,e\right)$.

Άσκηση 6

Αν $\alpha=\log_2 4x$, $\beta=\sqrt{15}$ και $\gamma=\log_2 2x$ να υπολογιστεί η τιμή του x ώστε οι αριθμοί: α, β, $\alpha+\gamma$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Λύση

Για να είναι οι αριθμοί α, β και γ διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου πρέπει και αρκεί:

$$\left(\sqrt{15}\right)^2=\log_2 4x\cdot\left(\log_2 4x+\log_2 2x\right) \quad (1)$$

Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης αυτής είναι το $(0,+\infty)$. Οπότε για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$(1)\Leftrightarrow 15=\left(\log_2 2^2x\right)\left(\log_2 8x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 15=\left(\log_2 2^2+\log_2 x\right)\left(\log_2 8+\log_2 x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 15=\left(2+\log_2 x\right)\left(\log_2 8+\log_2 x^2\right)$$

$$\Leftrightarrow 15=\left(2+\log_2 x\right)\left(\log_2 2^3+2\log_2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow 15=\left(2+\log_2 x\right)\left(3+2\log_2 x\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x=y \\ 15=(2+y)(3+2y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x=y \\ 2y^2+7y-9=0 \end{cases}$$

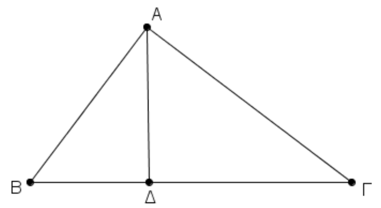
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x=y \\ \left(y=1 \text{ ή } y=-\dfrac{18}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \left(\log_2 x=1 \text{ ή } \log_2 x=-\dfrac{18}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x=2 \text{ ή } x=2^{-\frac{18}{4}}\right) \Leftrightarrow \left(x=2 \text{ ή } x=2^{-\frac{9}{2}}=\dfrac{1}{16\sqrt{2}}\right)$$

Άσκηση 7

Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ $\left(\hat{A}=90^\circ\right)$ και ΑΔ το ύψος του. Αν $ΑΓ=4\sqrt{3}$, $ΒΔ=\log_x 2$, $ΔΓ=\log_x 8$. Να βρεθεί το μήκος του ΒΓ.

Λύση



Από την Ευκλείδεια Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι: $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Delta\Gamma = (B\Delta + \Delta\Gamma)\cdot \Delta\Gamma \Leftrightarrow$

$48 = (\log_x 2 + \log_x 8)\cdot \log_x 8 \Leftrightarrow 48 = \log_x 16 \cdot \log_x 8$

$= 4\log_x 2 \cdot 3\log_x 2 \Leftrightarrow 48 = 12(\log_x 2)^2 \overset{\log_x 2>0}{\Leftrightarrow}$

$\log_x 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \overset{x>0}{\Leftrightarrow} x = \sqrt{2}$. Άρα:

$B\Gamma = B\Delta + \Delta\Gamma = \log_{\sqrt{2}} 2 + \log_{\sqrt{2}} 8 = \log_{\sqrt{2}} 16 =$

$\log_{\sqrt{2}} 2^4 = \log_{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2}\right)^8 = 8\log_{\sqrt{2}} \sqrt{2} = 8\cdot 1 = 8$

Άσκηση 8

Δίνεται η συνάρτηση:
$\mathbf{f(x) = \log^4 x + 8\log^2 x \cdot \log 100x,\ x > 0}$

Α) Δείξτε ότι: $\mathbf{f(10) - \log\alpha = 25 \Rightarrow \alpha = 1}$

Β) i) Δείξτε ότι $\mathbf{f(x) = \left(\log^2 x + 4\log x\right)^2}$

ii) Να λυθεί η εξίσωση: $\mathbf{f(x) = 0}$

Λύση

Α) $f(10) - \log\alpha = 25 \Rightarrow$

$(\log 10)^4 + 8(\log 10)^2 \cdot (\log 1000) - \log\alpha = 25$

$1 + 8\cdot 1\cdot 3 - \log\alpha = 25 \Rightarrow 25 - \log\alpha = 25 \Rightarrow$

$\log\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 1$

Β) i) $f(x) = \log^4 x + 8\log^2 x \cdot \log 100x =$

$\log^4 x + 8\log^2 x \cdot (\log 100 + \log x) =$

$\log^4 x + 16\log^2 x + 8\log^3 x =$

$\log^4 x + (4\log x)^2 + 8\log^3 x = \left(\log^2 x + 4\log x\right)^2$

ii) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \left(\log^2 x + 4\log x\right)^2 \Leftrightarrow$

$\log^2 x + 4\log x = 0 \Leftrightarrow \log x(\log x + 4) = 0 \Leftrightarrow$

$(\log x = 1 \text{ ή } \log x = -4) \Leftrightarrow \left(x = 10 \text{ ή } x = \dfrac{1}{1000}\right)$

Γ. ΕΚΘΕΤΙΚΕΣ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΕΣ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Οι εκθετικές και οι λογαριθμικές ανισώσεις επιλύονται εφαρμόζοντας την ιδιότητα της μονοτονίας της εκθετικής και λογαριθμικής συνάρτησης σύμφωνα με την οποία ισχύει:

- Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

Αν $\alpha > 1$ τότε: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$ (1)

Αν $0 < \alpha < 1$ τότε: $\alpha^{x_1} < \alpha^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$ (2)

- Για κάθε $x_1, x_2 > 0$,

Αν $\alpha > 1$ τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$ (3)

Αν $0 < \alpha < 1$ τότε: $\log_\alpha x_1 < \log_\alpha x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$ (4)

Άσκηση 1

Να λυθούν οι ανισώσεις:

1. $\mathbf{15\cdot 3^x - 3645 < 0}$
2. $\mathbf{0,2^{2x^3+x^2+1} > 0,2^{-2x^2+5x-3}}$
3. $\mathbf{\pi^{\eta\mu x} > \sqrt{\pi}}$ **στο** $\mathbf{(0,\pi)}$
4. $\mathbf{\ln(x+2) > \ln(3-x)}$
5. $\mathbf{(3 + \ln x)(4 - \ln x) \geq 0}$
6. $\mathbf{\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}} > 10^4}$

Λύση

1) $15\cdot 3^x - 3645 < 0 \Leftrightarrow 3^x < 3645 \div 15 \Leftrightarrow$

$3^x < 243 \Leftrightarrow 3^x < 3^5 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} x > 5$

2) $0,2^{2x^3+x^2+1} > 0,2^{-2x^2+5x-3} \overset{(2)}{\Leftrightarrow}$

$2x^3 + x^2 + 1 < -2x^2 + 5x - 3 \Leftrightarrow 2x^3 + x^2 - 5x + 2 < 0$

Παραγοντοποιώντας το πολυώνυμο του 1ου μέλους της ανίσωσης με τη βοήθεια του σχήματος Horner έχουμε:

2	1	-5	2	$\rho = 1$
↓	2	3	-2	
2	3	-2	0	

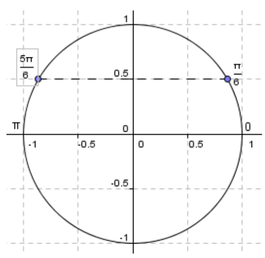
Έτσι: $2x^3 + x^2 - 5x + 2 = (x-1)(2x^2 + 3x - 2)$

Οπότε η ανίσωση γίνεται: $(x-1)(2x^2 + 3x - 2) < 0$

x	$-\infty$ -2	$1/2$	1	$+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$2x^2+3x-2$	$+$	$-$	$+$	$+$
Γινόμενο	$-$	$+$	$-$	$+$

Άρα: $(x-1)(2x^2 + 3x - 2) < 0 \Leftrightarrow$

$\left(-2 < x < \dfrac{1}{2} \text{ ή } x > 1\right)$



3) $\pi^{\eta\mu x} > \sqrt{\pi} \Leftrightarrow \pi^{\eta\mu x} > \pi^{\frac{1}{2}}$

$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} \eta\mu x > \dfrac{1}{2} \overset{x\in(0,\pi)}{\Leftrightarrow} \dfrac{\pi}{6} < x < \dfrac{5\pi}{6}$

4) Για να ανήκει ένας πραγματικός αριθμός x στο σύνολο ορισμού της ανίσωσης πρέπει και αρκεί: $x + 2 > 0$ και $3 - x > 0$ δηλαδή $-2 < x < 3$. Άρα ο σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το: $(-2,3)$. Έτσι έχουμε: $\ln(x+2) > \ln(3-x) \overset{(3)}{\Leftrightarrow} x + 2 > 3 - x$

$\Leftrightarrow 2x>1 \Leftrightarrow x>\frac{1}{2}$. Άρα: $x\in\left(\frac{1}{2},3\right)$

5) Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το: $(0,+\infty)$. Έτσι έχουμε: $(3+\ln x)(\ln x-4) \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \ln x = y \\ (3+y)(y-4)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = y \\ -3\leq y\leq 4 \end{cases} \Leftrightarrow -3\leq \ln x\leq 4$$

$e^{-3}\leq x\leq e^{4}$

$$-3\ln e\leq \ln x\leq 4\ln e \Leftrightarrow \ln e^{-3}\leq \ln x\leq \ln e^{4} \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

6) Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το: $(0,+\infty)$. Έτσι έχουμε: $\sqrt{x^{\log\sqrt{x}}}>10^4 \Leftrightarrow$

$$x^{\log\sqrt{x}}>10^8 \Leftrightarrow \log x^{\log\sqrt{x}}>\log 10^8 \Leftrightarrow \log\sqrt{x}\cdot\log x>8$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\log x)^2>8 \Leftrightarrow (\log x)^2>16 \Leftrightarrow \begin{cases} \log x = y \\ y^2>16 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log x = y \\ y<-4 \text{ ή } y>4 \end{cases} \Leftrightarrow (\log x<-4 \text{ ή } \log x>4) \Leftrightarrow$$

$$(\log x<-4\log 10 \text{ ή } \log x>4\log 10) \Leftrightarrow$$

$$(\log x<\log 10^{-4} \text{ ή } \log x>\log 10^{4}) \overset{(3)}{\Leftrightarrow}$$

$(x<10^{-4}$ ή $x>10^4)$. Άρα: $x\in(0,10^{-4})\cup(10^4,+\infty)$

Άσκηση 2

Δίνεται το τριώνυμο: $P(x)=x^2-3x-4$

Α) Να λυθεί η ανίσωση: $P(x)<0$

Β) Να λυθεί η ανίσωση: $\ln^2 x-3\ln x<4$

Λύση

Α) $P(x)<0 \Leftrightarrow x^2-3x-4<0 \Leftrightarrow -1<x<4$

Β) Το σύνολο ορισμού της ανίσωσης είναι το $(0,+\infty)$. Οπότε για κάθε $x\in(0,+\infty)$ έχουμε:

$$\ln^2 x-3\ln x<4 \Leftrightarrow P(\ln x)<0 \Leftrightarrow$$

$$-1<\ln x<4 \Leftrightarrow \ln\frac{1}{e}<\ln x<\ln e^4 \Leftrightarrow \frac{1}{e}<x<e^4$$

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=x+\ln\frac{e^x-2}{e^x+4}$

Α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

Β) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x)=\ln 5-\ln 3$

Γ) Να λυθεί η ανίσωση: $f(x)>0$

Λύση

Α) Για να ανήκει ένας πραγματικός αριθμός x στο πεδίο ορισμού της f πρέπει και αρκεί $\frac{e^x-2}{e^x+4}>0$. Όμως, $\frac{e^x-2}{e^x+4}>0 \Leftrightarrow$

$$(e^x-2)(e^x+4)>0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = y \\ y>0 \\ (y-2)(y+4)>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^x = y \\ y>0 \\ y<-4 \text{ ή } y>2 \end{cases} \Leftrightarrow e^x>2 \Leftrightarrow x>\ln 2.$$

Άρα το πεδίο ορισμού της f είναι: $(\ln 2,+\infty)$

Β) Το σύνολο ορισμού της εξίσωσης είναι το $(\ln 2,+\infty)$. Έτσι έχουμε: $f(x)=\ln 5-\ln 3 \Leftrightarrow$

$$x+\ln\frac{e^x-2}{e^x+4}=\ln\frac{5}{3} \Leftrightarrow \ln e^x+\ln\frac{e^x-2}{e^x+4}=\ln\frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$\ln\left(e^x\cdot\frac{e^x-2}{e^x+4}\right)=\ln\frac{5}{3} \Leftrightarrow \frac{e^{2x}-2e^x}{e^x+4}=\frac{5}{3} \Leftrightarrow$$

$$3e^{2x}-6e^x=5e^x+20 \Leftrightarrow 3e^{2x}-11e^x-20=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^x = y \\ y>0 \\ 3y^2-11e^x-20=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = y \\ y>0 \\ y=5 \text{ ή } y=-\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$e^x=5 \Leftrightarrow x=\ln 5$

Γ) $f(x)>0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{e^{2x}-2e^x}{e^x+4}\right)>\ln 1 \Leftrightarrow$

$$\frac{e^{2x}-2e^x}{e^x+4}>1 \Leftrightarrow e^{2x}-2e^x>e^x+4 \Leftrightarrow$$

$$e^{2x}-3e^x-4>0 \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = y \\ y>0 \\ y^2-3y-4>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} e^x = y \\ y>0 \\ \cancel{y<-1} \text{ ή } y>4 \end{cases} \Leftrightarrow e^x>4 \Leftrightarrow x>\ln 4$$

Δ. ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΕΚΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ – ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Η εκθετική συνάρτηση: $f(x)=\alpha^x,\ 0<\alpha\neq 1$ και η λογαριθμική συνάρτηση: $g(x)=\log_\alpha x$ είναι γνησίως αύξουσα αν $\alpha>1$ και γνησίως φθίνουσα αν $0<\alpha<1$.

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=(2\sigma\upsilon\nu\alpha)^x$,

$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

Α) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε η συνάρτηση f να είναι:
i) γνησίως αύξουσα, ii) γνησίως φθίνουσα

Β) Αν $\alpha=\frac{\pi}{6}$ να συγκριθούν οι αριθμοί:

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) \text{ και } f\left(\frac{\pi}{9}\right)$$

Γ) Αν $\alpha=\frac{5\pi}{12}$ να λυθεί η ανίσωση:

$$f\left(2^x\right)>f\left(1024\right)$$

Λύση

Α) Κατ' αρχήν η συνάρτηση για να ορίζεται πρέπει και αρκεί $2\sigma\upsilon\nu\alpha>0$ που ισχύει αφού $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$.

i) Για να είναι γνησίως αύξουσα πρέπει και αρκεί: $2\sigma\upsilon\nu\alpha>1$. Όμως:

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha>1\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\alpha>\frac{1}{2}\Leftrightarrow \alpha\in\left(-\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$$

ii) Για να είναι γνησίως φθίνουσα πρέπει και αρκεί: $0<2\sigma\upsilon\nu\alpha<1$.

Όμως: $0<2\sigma\upsilon\nu\alpha<1\Leftrightarrow 0<\sigma\upsilon\nu\alpha<\frac{1}{2}\Leftrightarrow$

$$\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{3}\right)\cup\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$$

Β) Για $\alpha=\frac{\pi}{6}$ η συνάρτηση γίνεται:

$f(x)=\left(2\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}\right)^x=\left(2\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^x=\left(\sqrt{3}\right)^x$ που είναι γνησίως αύξουσα. Άρα: $\frac{\pi}{8}>\frac{\pi}{9}\overset{(1)}{\Rightarrow} f\left(\frac{\pi}{8}\right)>f\left(\frac{\pi}{9}\right)$

Γ) Για $\alpha=\frac{5\pi}{12}$ η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα αφού $\frac{\pi}{3}<\frac{5\pi}{12}<\frac{\pi}{2}$. Άρα:

$$f\left(2^x\right)>f\left(1024\right)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}2^x<1024\Leftrightarrow 2^x<2^{10}\overset{(1)}{\Leftrightarrow}x<10$$

Άσκηση 2

Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x)=2^x$, $g(x)=f(-x)$, $h(x)=-f(x)$

Α) Αν η ευθεία $y=2$ τέμνει την γραφική παράσταση της f στο Α και την γραφική παράσταση της g στο Β και η ευθεία $x=1$ την γραφική παράσταση της h στο Γ, να βρεθούν οι συντεταγμένες των σημείων Α, Β και Γ.

Β) Να παρασταθούν στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων xOy οι συναρτήσεις f, g και h.

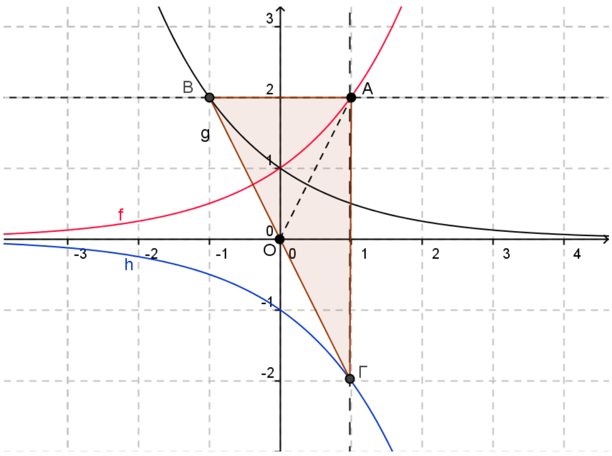
Γ) Να διατάξετε σε αύξουσα σειρά τους αριθμούς: $g\left(10^{-3}\right),g\left(10^{-2}\right),g\left(-10\right),g\left(10\right),g\left(0\right)$, $f\left(-10\right),f\left(10\right)$

Δ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές και να αποδειχθεί ότι: $\left(AB\Gamma\right)=2\left(OAB\right)$.

Λύση

Α) $f(x)=2\Leftrightarrow 2^x=2\Leftrightarrow x=1$, άρα $A\left(1,2\right)$,
$g(x)=2\Leftrightarrow f(-x)=2\Leftrightarrow 2^{-x}=2\Leftrightarrow -x=1\Leftrightarrow x=-1$
άρα $B\left(-1,2\right)$. Για $x=1$, $h(1)=-f(1)=-2^1=-2$, άρα: $\Gamma\left(1,-2\right)$.

Β) $f(x)=2^x$, $g(x)=f\left(-x\right)=2^{-x}$,
$h(x)=-f(x)=-2^x$. Οι γραφικές παραστάσεις των f και g είναι σχήματα συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y αφού αν $M\left(x,y\right)\in C_g$ τότε το $M'\left(-x,y\right)\in C_f$. Οι γραφικές παραστάσεις των h και f είναι σχήματα συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x αφού είναι αντίθετες. Έτσι έχουμε:



Γ) Η συνάρτηση $g(x)=2^{-x}$ είναι γνησίως φθίνουσα , οπότε ισχύει: $-10<0<10^{-3}<10^{-2}<10$
$\Rightarrow g\left(10\right)<g\left(10^{-2}\right)<g\left(10^{-3}\right)<g(0)<g\left(-10\right)$.

Η συνάρτηση $f(x)=2^x$ είναι γνησίως αύξουσα, οπότε ισχύει: $-10<10\Rightarrow f\left(-10\right)<f\left(10\right)$. Όμως: $g\left(10\right)=f\left(-10\right)$ και $g\left(-10\right)=f\left(10\right)$. Άρα:
$f\left(-10\right)=g\left(10\right)<g\left(10^{-2}\right)<g\left(10^{-3}\right)<g(0)<g\left(-10\right)$
$=f\left(10\right)$.

Δ) Το σημείο $O\left(0,0\right)$ είναι το μέσο του τμήματος ΑΒ αφού $B\left(-1,2\right)$, $\Gamma\left(1,-2\right)$ και

$0=\frac{-1+1}{2}$ και $0=\frac{2-2}{2}$. Όμως οι ευθείες $y=2$ και $x=1$ είναι κάθετες. Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με $\hat{A}=90°$. Επομένως η διάμεσος του ΑΟ ισούται με το ήμισυ της υποτείνουσάς του. Άρα: $AO=OB$ οπότε το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές. Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η διάμεσος χωρίζει το τρίγωνο σε δύο ισοδύναμα τρίγωνα. Άρα $(OAB)=(OA\Gamma)=\frac{(AB\Gamma)}{2}$. Οπότε: $(AB\Gamma)=2(OAB)$.

Άσκηση 3

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

Α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

Β) Να δείξετε ότι είναι περιττή

Γ) Αν Α και Β τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τις ευθείες $x=5$ και $x=-5$ να δείξετε ότι τα σημεία Α, Ο και Β είναι συνευθειακά.

Δ) Να λυθεί η εξίσωση:
$f(2017)\cdot f(x)=2\cdot f(-2017)$ (1)

Λύση

Α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $x^2+1>0$ καθώς επίσης: $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|\geq x \Rightarrow \sqrt{x^2+1}-x>0$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

Β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)+f(x)$

$$=\ln\left(\sqrt{(-x)^2+1}-(-x)\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$=\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)+\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$$

$$=\ln\left[\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\right]=\ln\left(\sqrt{x^2+1}^{\,2}-x^2\right)$$

$=\ln\left(x^2+1-x^2\right)=\ln 1=0$. Άρα: $f(-x)=-f(x)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι περιττή.

Γ) Θα είναι $A(5,f(5))$, $B(-5,f(-5)=-f(5))$. Άρα τα σημεία έχουν αντίθετες τετμημένες και τεταγμένες. Άρα είναι σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων.

Δ) Θα αποδείξουμε κατ' αρχήν ότι η εξίσωση (1) ισοδυναμεί με την εξίσωση: $f(x)=-2$.

Πράγματι, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει:
$f(2017)\cdot f(x)=2\cdot f(-2017)\Leftrightarrow -f(-2017)\cdot f(x)$
$=2\cdot f(-2017)\Leftrightarrow -f(x)=2\Leftrightarrow f(x)=-2$ (2).

Έστω x λύση της εξίσωσης (2). Τότε:

$(2)\Rightarrow \ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=-2\Rightarrow \sqrt{x^2+1}-x=e^{-2}$ (3)

Αν ο αριθμός x επαληθεύει την εξίσωση (2) τότε θα ισχύει: $-f(-x)=-2\Rightarrow f(-x)=2\Rightarrow$

$\ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=2\Rightarrow \sqrt{x^2+1}+x=e^2$ (4).

Αφαιρώντας από την (4) την (3) έχουμε:

$$\left(\cancel{\sqrt{x^2+1}}+x\right)-\left(\cancel{\sqrt{x^2+1}}-x\right)=e^2-e^{-2}\Rightarrow$$

$2x=e^2-e^{-2}\Rightarrow x=\frac{e^2-e^{-2}}{2}$. Πράγματι ο αριθμός $\frac{e^2-e^{-2}}{2}$ είναι λύση της εξίσωσης (2) αφού:

$$f\left(\frac{e^2-e^{-2}}{2}\right)=\ln\left(\sqrt{\left(\frac{e^2-e^{-2}}{2}\right)^2+1}-\frac{e^2-e^{-2}}{2}\right)=$$

$$\ln\left(\sqrt{\frac{e^4-2+e^{-4}}{4}+\frac{4}{4}}-\frac{e^2-e^{-2}}{2}\right)=$$

$$\ln\left(\sqrt{\frac{e^4+2+e^{-4}}{4}}-\frac{e^2-e^{-2}}{2}\right)=$$

$$\ln\left(\sqrt{\left(\frac{e^2+e^{-2}}{2}\right)^2}-\frac{e^2-e^{-2}}{2}\right)=$$

$$\ln\left(\frac{e^2+e^{-2}}{2}-\frac{e^2-e^{-2}}{2}\right)=\ln\frac{2e^2}{2}=\ln e^2=2$$

Άσκηση 4

Α) Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=2^{\sqrt{1-x}}$. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της Α και να δείξετε ότι η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1.

Β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x)=\sqrt{1-x^2}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Β και να δείξετε ότι παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο 0.

Γ) Δίνεται η συνάρτηση $h(x)=2^{\sqrt{1-x^2}}$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της Γ και να δείξετε ότι παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1 και στο -1 και ολικό μέγιστο στο 0.

Λύση

Α) Για να ανήκει ένας πραγματικός αριθμός x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης f πρέπει και αρκεί $1-x\geq 0$ δηλαδή $x\leq 1$. Άρα $A=(-\infty,1]$.

Αρκεί για κάθε $x\in(-\infty,1]$ $f(x)\geq f(1)$, αρκεί $2^{\sqrt{1-x}}\geq 1$, αρκεί $\sqrt{1-x}\geq 0$ (αφού η συνάρτηση $f(x)=2^x$ είναι γνησίως αύξουσα), αρκεί

$1-x \geq 0$, αρκεί $x \leq 1$ που ισχύει. Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο 1.

Β) Για να ανήκει ένας πραγματικός αριθμός x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης g πρέπει και αρκεί $1-x^2 \geq 0$ δηλαδή $-1 \leq x \leq 1$. Άρα $B = [-1,1]$. Αρκεί για κάθε $x \in [-1,1]$ $g(x) \leq g(0)$, αρκεί $\sqrt{1-x^2} \leq 1$, αρκεί $1-x^2 \leq 1$, αρκεί $x^2 \geq 0$ που ισχύει.

Γ) Για να ανήκει ένας πραγματικός αριθμός x στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης h πρέπει και αρκεί $1-x^2 \geq 0$ δηλαδή $-1 \leq x \leq 1$. Άρα $\Gamma = [-1,1]$. Αρκεί για κάθε $x \in [-1,1]$ $h(-1) = h(1) \leq h(x) \leq h(0)$, αρκεί $1 \leq 2^{\sqrt{1-x^2}} \leq 2$, αρκεί $0 \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$ (αφού η συνάρτηση $f(x) = 2^x$ είναι γνησίως αύξουσα), αρκεί $0 \leq 1-x^2 \leq 1$, αρκεί $-1 \leq -x^2 \leq 0$, αρκεί $0 \leq x^2 \leq 1$ που ισχύει.