ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ Α΄ ΒΑΘΜΟΥ

Κώστα Βακαλόπουλου

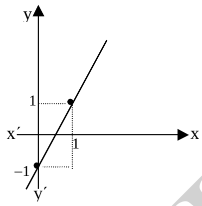
Α. ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής: $\boxed{\alpha\cdot x+\beta\cdot\psi=\gamma}$ (1) , με $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ π.χ. $2\cdot x-\psi=1$, $x=2$, $\psi=3$, κλπ.

Λύσεις της εξίσωσης αυτής (αν υπάρχουν) είναι κάθε ζεύγος αριθμών (x, ψ) που την επαληθεύει.

Παράδειγμα:

Η εξίσωση: $\mathbf{2x-\psi=1}$ έχει **άπειρες λύσεις** π.χ. τα ζεύγη: (1, 1), (2, 3), . . . Όλα τα ζεύγη αυτά απεικονιζόμενα στο καρτεσιανό επίπεδο παρίστανται με τα σημεία της ευθείας: **ε: ψ = 2x – 1** δηλαδή την γραφική παράσταση της συνάρτησης **f(x) = 2x – 1** με $x\in\mathbb{R}$.



Ας δούμε όμως τις περιπτώσεις των γραμμικών εξισώσεων με τη σειρά:

1η περίπτωση:

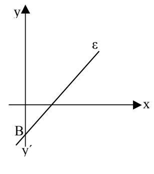
Αν $\alpha\neq0$ ή $\beta\neq0$, δηλαδή αν οι συντελεστές α,β δεν είναι συχρόνως μηδέν, τότε:

- Αν $\mathbf{\beta\neq0}$ τότε η εξίσωση (1) γίνεται:

  $\beta\cdot\psi=-\alpha\cdot x+\gamma\Leftrightarrow\boxed{\psi=-\dfrac{\alpha}{\beta}\cdot x+\dfrac{\gamma}{\beta}}$ και έχει λύσεις όλα τα ζεύγη των αριθμών (x, ψ) που είναι συντεταγμένες των σημείων της ευθείας ε,

  ✓ με συντελεστή διεύθυνσης: $\lambda=\varepsilon\varphi\omega=-\dfrac{\alpha}{\beta}$ και που

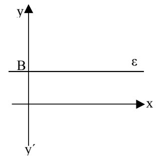
  ✓ τέμνει τον άξονα ψψ΄ στο σημείο $B(0,\dfrac{\gamma}{\beta})$.



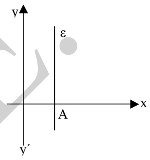
Λέμε τότε ότι η ευθεία ε έχει εξίσωση την: $\alpha\cdot x+\beta\cdot\psi=\gamma$ ή ότι η εξίσωση $\alpha\cdot x+\beta\cdot\psi=\gamma$ παριστάνει την ευθεία ε.

Προσοχή !

Αν **$\beta\neq0$ και $\alpha=0$** τότε η εξίσωση (1) γίνεται: $\boxed{\psi=\dfrac{\gamma}{\beta}}$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα xx΄.



- Αν **$\beta=0$ τότε $\alpha\neq0$** και η εξίσωση (1) γίνεται: $\boxed{x=\dfrac{\gamma}{\alpha}}$ και παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα ψψ΄.



2η περίπτωση:

Αν $\alpha=0$ και $\beta=0$ τότε η εξίσωση (1) γίνεται: $0\cdot x+0\cdot\psi=\gamma$, (2) οπότε:

✓ Αν $\gamma=0$ τότε η εξίσωση (2) γίνεται $0\cdot x+0\cdot\psi=0$ και επαληθεύεται από οποιοδήποτε ζεύγος αριθμών και παριστάνουν όλο το **επίπεδο.**

✓ Αν $\gamma\neq0$ τότε η εξίσωση (2) γίνεται $0\cdot x+0\cdot\psi=\gamma$ και δεν επαληθεύεται από κανένα ζεύγος αριθμών είναι δηλαδή αδύνατη και παριστάνει το **κενό σύνολο**.

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Μια γραμμική εξίσωση $\mathbf{\alpha\cdot x+\beta\cdot\psi=\gamma}$, (με δυο αγνώστους) παριστάνει ευθεία μόνο αν οι συντελεστές α και β δεν μηδενίζονται συγχρόνως δηλαδή αν $\alpha\neq0$ ή $\beta\neq0$ δηλαδή αν $|\alpha|+|\beta|\neq0$

Παράδειγμα:

Η εξίσωση $\kappa\cdot x+(\kappa+1)\cdot\psi=3$ παριστάνει ευθεία για κάθε $\kappa\in\mathbb{R}$ αφού τα κ, κ + 1 δεν μηδενίζονται συγχρόνως για καμία πραγματική τιμή του κ.

Παρατήρηση:

Ο καλύτερος τρόπος για να αποδώσουμε το σύνολο λύσεων μιας γραμμικής εξίσωσης : $\alpha\cdot x+\beta\cdot\psi=\gamma$ με $\alpha\neq0$ ή $\beta\neq0$ είναι με τις συντεταγμένες των σημείων της ευθείας που παριστάνει.

Β. ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ ΜΕ ΔΥΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

Σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους ονομάζουμε δυο γραμμικές εξισώσεις μαζί, των οποίων ζητάμε, αν υπάρχουν, τις κοινές λύσεις π.χ. το σύστημα (Σ): $\begin{cases} \alpha_1 \cdot x + \beta_1 \cdot \psi = \gamma_1 \\ \alpha_2 \cdot x + \beta_2 \cdot \psi = \gamma_2 \end{cases}$ με $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2 \in \mathbb{R}$

Επίλυση ενός γραμμικού συστήματος είναι η διαδικασία εύρεσης, αν υπάρχουν, των λύσεών του.

Αξιόλογες επισημάνσεις:

Αν οι εξισώσεις του συστήματος παριστάνουν ευθείες τότε αν :

- ✓ Οι ευθείες **τέμνονται,** το σύστημα έχει **μια μόνο λύση,** τις συντεταγμένες του κοινού σημείου των δύο ευθειών.
- ✓ Οι ευθείες είναι **παράλληλες**, το σύστημα είναι **αδύνατο** και δεν έχει λύση.
- ✓ Οι ευθείες **ταυτίζονται,** το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** τις συντεταγμένες των σημείων της μιας εκ των δύο ευθειών.

ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Σύμφωνα με τα παραπάνω ένας τρόπος επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος του οποίου οι εξισώσεις παριστάνουν ευθείες είναι ο **γραφικός** δηλαδή η παράσταση σ' ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, των ευθειών που παριστάνουν οι εξισώσεις του και στη συνέχεια,

- ✓ είτε ο προσδιορισμός του **κοινού τους σημείου**
- ✓ είτε η διαπίστωση ότι οι ευθείες είναι **παράλληλες** δηλαδή ότι το σύστημα είναι αδύνατο
- ✓ είτε ακόμη ότι οι ευθείες **ταυτίζονται** δηλαδή ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Παράδειγμα

Να λυθεί (γραφικά) το σύστημα: $\begin{cases} \mathbf{2x - y = 1} \\ \mathbf{x + y = 2} \end{cases}$

Λύση

Σύμφωνα με τις γραφικές παραστάσεις των γραμμικών εξισώσεων του συστήματος (σχήμα), λύση του συστήματος είναι οι συντεταγμένες του κοινού τους σημείου δηλαδή:(x, ψ) = (1, 1).

ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

Επειδή η γραφική επίλυση ενός γραμμικού συστήματος έχει το μειονέκτημα της έλλειψης ακρίβειας στον προσδιορισμό των λύσεων υπενθυμίζουμε τις αλγεβρικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων :

- Μέθοδος αντικατάστασης
- Μέθοδος αντιθέτων συντελεστών και
- Μέθοδος οριζουσών

ΜΕΡΟΣ Α΄:

- **ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ**
- **ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ**

Στις αλγεβρικές μεθόδους επίλυσης ενός γραμμικού συστήματος, το μετατρέπουμε διαρκώς σε άλλο ισοδύναμό του, δηλαδή σε σύστημα με τις ίδιες ακριβώς λύσεις με το αρχικό. Αυτό επιτυγχάνεται με δύο τρόπους:

- *Λύνουμε τη μια εξίσωση ως προς τον έναν άγνωστο και τον αντικαθιστούμε στην άλλη*
- *Αντικαθιστούμε μια από τις εξισώσεις του συστήματος με το **γραμμικό της συνδυασμό** με την άλλη.*

Γραμμικός συνδυασμός *της εξίσωσης ε_1 με την ε_2 είναι η εξίσωση που θα προκύψει από την πρόσθεση κατά μέλη των δυο εξισώσεων ε_1 και ε_2 πολλαπλασιασμένες η κάθε μια με έναν (κατάλληλο) αριθμό λ_1 και λ_2* με $\lambda_1 \neq 0$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \mathbf{2x - y = 1} \\ \mathbf{x + y = 2} \end{cases}$

ΛΥΣΗ

(ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ)

$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ y = 2 - x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - (2 - x) = 1 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ y = 2 - x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$$

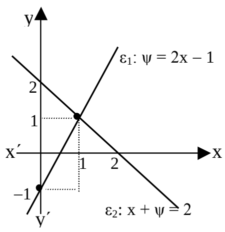
Άρα: Το σύστημα έχει μια **μοναδική λύση** την (x, y) = (1, 1).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.

Να λυθεί το σύστημα:

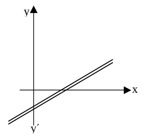
$\begin{cases} \mathbf{2x - y = 1} \\ \mathbf{x + y = 2} \end{cases}$

ΛΥΣΗ



(ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΘΕΤΩΝ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΩΝ)

$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$



$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x - y) + (x + y) = 1 + 2 \\ x + y = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 3 \\ x + y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ 1 + y = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}$

Άρα: Το σύστημα έχει μια **μοναδική λύση** την $(x, y) = (1, 1)$.

Παρατήρηση:

Οι αριθμοί λ_1 και λ_2 επιλέγονται έτσι ώστε να προκύψουν αντίθετοι συντελεστές σε έναν από τους αγνώστους. Στο προηγούμενο παράδειγμα ήταν $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \mathbf{3x + 2y = 36} \\ \mathbf{2x + 4y = 40} \end{cases}$

ΛΥΣΗ

$\begin{cases} 3x + 2y = 36 \\ 2x + 4y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} 2\cdot(3x + 2y) + (-3)\cdot(2x + 4y) = 2\cdot 36 + (-3)\cdot 40 \\ 2x + 4y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} -8y = -48 \\ 2x + 4y = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ 2x + 4\cdot 6 = 40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 6 \\ x = 8 \end{cases}$

Άρα: Το σύστημα έχει μια **μοναδική λύση** την $(x, y) = (8, 6)$.

<u>ΑΔΥΝΑΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ</u>

Όπως έχουμε αναλύσει πριν, ένα σύστημα του οποίου οι εξισώσεις παριστάνουν ευθείες είναι αδύνατο όταν οι ευθείες είναι παράλληλες. Τι γίνεται όμως όταν το λύνουμε αλγεβρικά;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \mathbf{6x - 2y = 11} \\ \mathbf{9x - 3y = 15} \end{cases}$

ΛΥΣΗ

<u>1η μέθοδος: (Αντικατάστασης)</u>

$\begin{cases} 6x - 2y = 11 \\ 9x - 3y = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{6x - 11}{2} \\ 9x - 3\cdot\dfrac{6x - 11}{2} = 15 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 11 \\ 18x - 18x + 33 = 30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x - 2y = 11 \\ \mathbf{0x = -3} \text{ (Αδύνατη)} \end{cases}$

Άρα: Το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ.

<u>2η μέθοδος: (Αντιθέτων συντελεστών)</u>

$\begin{cases} 6x - 2y = 11 \\ 9x - 3y = 15 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(6x - 2y) + (-2)(9x - 3y) = 3\cdot 11 + (-2)\cdot 15 \\ 9x - 3y = 15 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{0x + 0y = 3} \text{ (Αδύνατη)} \\ 9x - 3y = 15 \end{cases}$

Άρα: Το σύστημα είναι ΑΔΥΝΑΤΟ.

Παρατήρηση: Επιλύνοντας γραφικά το σύστημα παρατηρούμε ότι η πρώτη εξίσωση παριστάνει την ευθεία:

ε_1: $\psi = 3\cdot x - \dfrac{11}{2}$ και η δεύτερη την ευθεία :

ε_2: $\psi = 3\cdot x - 5$ που είναι **παράλληλες** οπότε το σύστημα είναι **Αδύνατο**.

<u>ΑΟΡΙΣΤΟ ΣΥΣΤΗΜΑ</u>
<u>(ή ΣΥΣΤΗΜΑ ΜΕ ΑΠΕΙΡΕΣ ΛΥΣΕΙΣ)</u>

Όπως έχουμε αναλύσει πριν, ένα σύστημα του οποίου οι εξισώσεις παριστάνουν ευθείες έχει άπειρες λύσεις όταν οι ευθείες ταυτίζονται. Τι γίνεται όμως όταν το λύνουμε αλγεβρικά;

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \mathbf{x - 3y = 9} \\ \mathbf{-2x + 6y = -18} \end{cases}$

ΛΥΣΗ

<u>1η μέθοδος: (Αντικατάστασης)</u>

$\begin{cases} x - 3y = 9 \\ -2x + 6y = -18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 9 \\ -2x + 6y = -18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3y + 9 \\ -2(3y + 9) + 6y = -18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \ldots \begin{cases} x = 3y + 9 \\ \mathbf{0y = 0} \text{ (άπειρες λύσεις)} \end{cases}$

Άρα: Το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** της μορφής: $(x, y) = (3y + 9, y)$,όπου $y \in \mathbb{R}$.

<u>2η μέθοδος: (Αντιθέτων συντελεστών)</u>

$\begin{cases} x - 3y = 9 \\ -2x + 6y = -18 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x - 3y) + (-2x + 6y) = 2\cdot 9 + (-18) \\ x - 3y = 9 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{0x + 0y = 0} \text{ (Άπειρες λύσεις)} \\ x - 3y = 9 \end{cases}$

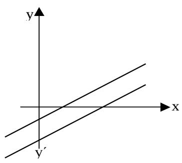
$(x - 3y = 9 \Leftrightarrow x = 3y + 9)$

Άρα: Το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** της μορφής: $(x, y) = (3y + 9, y)$,όπου $y \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση:

Επιλύνοντας γραφικά το σύστημα παρατηρούμε ότι η πρώτη εξίσωση παριστάνει την ευθεία: ε_1: $\psi = \dfrac{1}{3}\cdot x - 3$ και η δεύτερη την ευθεία :

ε_2: $\psi = \frac{1}{3}\cdot x - 3$ που



ταυτίζονται οπότε το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** της μορφής: $(x, y) = (3y + 9, y)$,όπου $y\in\mathbb{R}$ ή της μορφής:

ε_1:$(x, \psi) = (x, \frac{1}{3}x - 3)$, $x\in\mathbb{R}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α. Σωστό – Λάθος

1. Το σημείο (2, 3) ανήκει στην ευθεία x = 3. Σ Λ

2. Η εξίσωση $(\lambda + 1)\cdot x + (\lambda^2 - 1)\cdot\psi = 3$ παριστάνει ευθεία για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ Σ Λ

3. Υπάρχουν τιμές των α, β για τις οποίες το σύστημα: $\begin{cases} \alpha x - \psi = 0 \\ \beta x + \psi = 0 \end{cases}$ δέχεται πάντα άπειρες λύσεις. Σ Λ

Β. Πολλαπλής επιλογής

1. Η γραμμική εξίσωση που επαληθεύεται με κάθε ζεύγος της μορφής: $(x, \psi) = (2\kappa + 3, \kappa - 1)$ $(\kappa\in\mathbb{R})$ είναι:

Α. $x - 2\psi = 1$, Β. $x - \psi = 2$, Γ. $x - 2\psi = 5$

Δ. $x - y = 3$, Ε. $2\psi - x = 1$

Γ. Ανάπτυξης (Συμπληρωματικές)

1. Για ποιες τιμές των α, β οι ευθείες με εξισώσεις αντίστοιχα: ε_1:$(\alpha + \beta)x + (\alpha - \beta)\psi = 4\beta - 6\alpha$, ε_2:$2(\alpha - \beta)x - (\alpha + \beta)\psi = 2 - 2\beta$ τέμνονται στο σημείο Μ(2, –3).

2. Να λυθούν τα συστήματα:

α) $\begin{cases} |x + 2\psi - 6| = 5 \\ 2x + 3\psi = 18 \end{cases}$,β) $\begin{cases} 0{,}5x - 1{,}5\psi = 1 \\ 0{,}4x - 0{,}2\psi = 0{,}4 \end{cases}$

3. Σε μια έκθεση αυτοκινήτων υπάρχουν συνολικά 17 αυτοκίνητα τρίθυρα και πεντάθυρα. Αν όλα μαζί έχουν 67 πόρτες πόσα αυτοκίνητα με πέντε πόρτες και πόσα με τρεις πόρτες υπάρχουν στην έκθεση;

4. Σε ένα διψήφιο αριθμό το ψηφίο των δεκάδων είναι αριθμός μεγαλύτερος κατά 2 του ψηφίου των μονάδων. Αν διαιρέσουμε τον διψήφιο αριθμό αυτό με το άθροισμα των ψηφίων δεκάδων και μονάδων βρίσκουμε πηλίκο 6 και υπόλοιπο 3. Να βρεθεί ο διψήφιος αριθμός.

(Υπόδειξη: Θυμίζουμε ότι αν x και ψ τα ψηφία των δεκάδων και μονάδων αντίστοιχα ο αριθμός ισούται με: 10x + ψ)

ΜΕΡΟΣ Β΄:

- **ΜΕΘΟΔΟΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ**

Έστω το σύστημα: $\begin{cases} \boldsymbol{\alpha x + \beta\psi = \gamma} \\ \boldsymbol{\alpha' x + \beta'\psi = \gamma'} \end{cases}$

Αν $D = \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha' & \beta' \end{vmatrix} = \alpha\beta' - \beta\alpha'$,

$D_x = \begin{vmatrix} \gamma & \beta \\ \gamma' & \beta' \end{vmatrix} = \gamma\beta' - \beta\gamma'$ και

$D_\psi = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma \\ \alpha' & \gamma' \end{vmatrix} = \alpha\gamma' - \gamma\alpha'$ τότε:

- Αν $\boxed{\mathbf{D \neq 0}}$ τότε το σύστημα έχει **μοναδική λύση** την: $\mathbf{(x, \psi) = \left(\frac{D_x}{D}, \frac{D_\psi}{D}\right)}$ *(Παράδ.1)*

- Αν $\boxed{\mathbf{D = 0}}$ τότε το σύστημα είναι **Αδύνατο** ή έχει **Άπειρες λύσεις (Αόριστο)**

Επισημαίνουμε ότι:

*Αν $D = 0$ και $D_x \neq 0$ ή $D_\psi \neq 0$ τότε το σύστημα είναι **Αδύνατο** (Παράδ.2)*

Αν $D = D_x = D_\psi = 0$ και υπάρχει ένας τουλάχιστον συντελεστής αγνώστου, διάφορος του μηδενός το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. (Παράδ.3)

Αν $D = D_x = D_\psi = 0$ και όλοι οι συντελεστές των αγνώστων είναι μηδέν τότε αν $\gamma = \gamma' = 0$ τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις οποιοδήποτε ζεύγος αριθμών (x, y) (Παραδ.5) , ενώ αν $\gamma \neq 0$ ή $\gamma' \neq 0$ το σύστημα είναι αδύνατο (Παραδ.4)

Προσέξτε όμως!

Στην περίπτωση που ισχύει $D = 0$ μπορούμε να λύνουμε το σύστημα με έναν από τους αλγεβρικούς τρόπους που προαναφέραμε και να διαπιστώνουμε έτσι αν είναι αδύνατο ή έχει άπειρες λύσεις.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \mathbf{2x - y = 1} \\ \mathbf{x + y = 2} \end{cases}$

Λύση

$D = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 1\cdot(-1) = 3 \neq 0$,

$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1\cdot 1 - 2\cdot(-1) = 3$,

$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 1\cdot 1 = 3$

Άρα:

Το σύστημα έχει **μοναδική λύση** την:

$(x, \psi) = \left(\frac{3}{3}, \frac{3}{3}\right) = (1, 1)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \mathbf{6x - 2y = 11} \\ \mathbf{9x - 3y = 15} \end{cases}$

Λύση

$D = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 9 & -3 \end{vmatrix} = 6\cdot(-3) - 9\cdot(-2) = 0$,

$D_x = \begin{vmatrix} 11 & 15 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 11\cdot(-3) - 15\cdot(-2) = -3 \neq 0$

Άρα: Το σύστημα είναι **Αδύνατο.**

Άλλωστε οι ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος ε_1: $\psi = 3\cdot x - \frac{11}{2}$, ε_2: $\psi = 3\cdot x - 5$ είναι παράλληλες.

Παρατηρείστε επίσης ότι: $\frac{6}{9} = \frac{-2}{3} \neq \frac{11}{15}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \mathbf{x - 3y = 9} \\ \mathbf{-2x + 6y = -18} \end{cases}$

Λύση

$D = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot 6 - (-2)\cdot(-3) = 0$,

$D_x = \begin{vmatrix} 9 & -3 \\ -18 & 6 \end{vmatrix} = 9\cdot 6 - (-18)\cdot(-3) = 0$,

$D_y = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 9 & -18 \end{vmatrix} = 1\cdot(-18) - 9\cdot(-2) = 0$

Επειδή υπάρχει τουλάχιστον ένας συντελεστής μη μηδενικός το σύστημα έχει άπειρες λύσεις.

Άλλωστε οι ευθείες που παριστάνουν οι εξισώσεις του συστήματος ε_1: $\psi = \frac{1}{3}\cdot x - 3$, ε_2: $\psi = \frac{1}{3}\cdot x - 3$ ταυτίζονται.

Παρατηρείστε επίσης ότι: $\frac{1}{-2} = \frac{-3}{6} = \frac{9}{-18}$

Άρα: Το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις**, της μορφής $(x, \psi) = (x, \frac{1}{3}\cdot x - 3)$,όπου $x \in \mathbb{R}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \mathbf{0x + 0y = 0} \\ \mathbf{0x + 0y = 3} \end{cases}$

Λύση

Προφανώς $D = D_x = D_\psi = 0$

Όμως το σύστημα είναι **Αδύνατο** αφού η εξίσωση: $0x + 0y = 3$ είναι Αδύνατη.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \mathbf{0x + 0y = 0} \\ \mathbf{0x + 0y = 0} \end{cases}$

Λύση

Προφανώς $D = D_x = D_\psi = 0$

Όμως το σύστημα έχει **άπειρες λύσεις** κάθε ζεύγος αριθμών (x, y).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Την μέθοδο των οριζουσών την χρησιμοποιούμε για την επίλυση αριθμητικών συστημάτων όταν οι συντελεστές είναι ¨δύσκολοι αριθμοί¨ αλλά κυρίως για την διερεύνηση ***παραμετρικών συστημάτων*** *όπως το παράδειγμα που ακολουθεί:*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \mathbf{\lambda x + y = \lambda^2} \\ \mathbf{x + \lambda y = 1} \end{cases}$ **, για κάθε πραγματική τιμή του λ.**

Λύση

$D = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda + 1)$,

$D_x = \begin{vmatrix} \lambda^2 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2\cdot\lambda - 1\cdot 1 = \lambda^3 - 1 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + 1)$

$D_y = \begin{vmatrix} \lambda & \lambda^2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = \lambda\cdot 1 - 1\cdot\lambda^2 = -\lambda(\lambda - 1)$

$D = 0 \Leftrightarrow (\lambda - 1)(\lambda + 1) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = -1$

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $\lambda \neq 1$ και $\lambda \neq -1$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση την:

  $(x, \psi) = \left(\frac{\lambda^2 + \lambda + 1}{\lambda + 1}, \frac{-\lambda}{\lambda + 1}\right)$

- Αν $\lambda = 1$ το σύστημα γίνεται: $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$

Οπότε έχει **άπειρες λύσεις** της μορφής:

$(x, y) = (x, 1 - x)$, $x \in \mathbb{R}$.

- Αν $\lambda = -1$ το σύστημα είναι **αδύνατο** αφού $D_x = -2 \neq 0$

(Επαληθεύτε γραφικά τα συμπεράσματά σας)

ΟΜΟΓΕΝΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ

Έστω το σύστημα: $\begin{cases} \alpha x + \beta\psi = 0 \\ \alpha' x + \beta'\psi = 0 \end{cases}$

Το σύστημα αυτό λέγεται **ομογενές** ($\gamma = \gamma' = 0$)
Προφανώς έχει πάντα λύση τη **μηδενική**
$(x, y) = (0, 0)$.

- Αν $D \neq 0$ τότε έχει μία μόνο λύση την μηδενική και
- Αν $D = 0$ τότε έχει άπειρες λύσεις συμπεριλαμβανομένης και της μηδενικής.

(Στα ομογενή συστήματα ισχύει: $D_x = D_\psi = 0$)

Παράδειγμα:
Να λυθεί το ομογενές σύστημα με δύο εξισώσεις και δύο αγνώστους και με ορίζουσες που ικανοποιούν τις συνθήκες:
$\mathbf{D_x + D_\psi + D = 1.}$

Λύση
Επειδή $D_x = D_\psi = 0$ θα ισχύει: $D = 1 \neq 0$ άρα το σύστημα έχει μόνο μία λύση την μηδενική:
$(x, y) = (0, 0)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. ΣΩΣΤΟΥ – ΛΑΘΟΥΣ

(1) Αν $|D - 2| + |2D - 4| = 0$ τότε το σύστημα έχει μοναδική λύση Σ Λ

(2) Αν $|D| + |D_\psi + 2| = 0$ τότε το σύστημα έχει άπειρες λύσεις Σ Λ

(3) Αν $D^2 + (1 - D_x)^2 = 0$, το σύστημα είναι αδύνατο Σ Λ

(4) Αν $D^2 + D_x^{\ 2} + (2 + D_\psi)^2 = 0$ το (Σ) είναι αδύνατο Σ Λ

(5) Αν $|D_x| + |D_\psi| + |D| + = 0$ τότε το (Σ) έχει πάντα άπειρες λύσεις Σ Λ

2. Αν $D \neq 0$ και $D_x = \frac{2}{3}D$ και $D_\psi = 2D_x$ τότε η λύση του αντιστοίχου συστήματος είναι:

Α $(2, 2)$, Β $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$, Γ $\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$, Δ $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$, Ε $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{2}{3}\right)$

3. Αν το σύστημα: $\begin{cases} 4x + 2\kappa\psi = 1 \\ 2x + 3\psi = 4 \end{cases}$, $\kappa \in \mathbb{R}$ είναι αδύνατο, τότε το σύστημα: $\begin{cases} x + \psi = -1 \\ \kappa x + 3y = 3 \end{cases}$ είναι:

Α. Αδύνατο, **Β.** Έχει άπειρες λύσεις
Γ. Έχει μοναδική λύση την $(x,y) = (-2,1)$,
Δ . Δεν μπορούμε να απαντήσουμε.

4. Για ποια τιμή του λ το σύστημα: $\begin{cases} 2x + \lambda\psi = 7 \\ 6x - 15\psi = 21 \end{cases}$ έχει άπειρες λύσεις.

5. Για ποιες τιμές του λ το σύστημα: $\begin{cases} x + \psi = 7 \\ 2x + 2\psi = \lambda - 1 \end{cases}$ είναι αδύνατο.

6. Υπάρχουν τιμές του λ για τις οποίες το σύστημα: $\begin{cases} x + \lambda\psi = 4 \\ -2x + 5\psi = 1 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση;

7. Να λυθεί το σύστημα: $\begin{cases} \lambda x + (\lambda + 1)\psi = \lambda \\ (\lambda + 1)x + (\lambda + 3)\psi = 2 \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

8. Για ποιες τιμές του λ το (ομογενές) σύστημα: $\begin{cases} \lambda x - 3\lambda\psi = 0 \\ (\lambda - 2)x - \lambda y = 0 \end{cases}$ έχει και άλλες λύσεις εκτός της μηδενικής.

9. Σ' ένα σύστημα δυο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, ψ ισχύει:
$D^2 + D_x^2 + D_\psi^2 = 6D - 2D_\psi - 10.$
Να λυθεί το σύστημα.

10. Σ' ένα σύστημα δυο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x, ψ ισχύει:
$\begin{cases} 2D_x + D_\psi = 12D \\ D_x - 2D_\psi = D \end{cases}$
Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση να βρεθεί η λύση αυτή.

11. Σ' ένα σύστημα δυο γραμμικών εξισώσεων με αγνώστους x,ψ ισχύει:
$D_x^2 + D_\psi^2 = -2D_xD_\psi$ Αν το σύστημα έχει μοναδική λύση και $x - \psi = 8$ να βρεθούν τα x, ψ.