θ. Bolzano – θ. Ενδιάμεσων τιμών – θ. Μεγίστου Ελαχίστου και Εφαρμογές

Κώστας Βακαλόπουλος

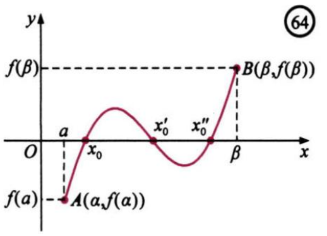
Στο άρθρο αυτό επιχειρείται μια προσέγγιση των βασικών αυτών θεωρημάτων με εφαρμογές έτσι ώστε να γίνει περισσότερο κατανοητή στους μαθητές η χρησιμότητά τους στην Ανάλυση.

Α. ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO

Αν μια συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$,

- είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

τότε, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε, $f(x_0)=0$



.

Αλγεβρική ερμηνεία:

Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ τότε η εξίσωση: $f(x)=0$ έχει **τουλάχιστον μια** λύση στο διάστημα (α,β) .

Γεωμετρική ερμηνεία:

Αν f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ με $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$ τότε η γραφική παράσταση της f *(C_f)* **τέμνει τον άξονα x΄x σ' ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο (α,β).**

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΟΥ Θ. BOLZANO

1η) Με το θ. Bolzano αποδεικνύεται η ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας μιας εξίσωσης: $f(x)=0$ σ' ένα διάστημα (α,β).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Να δειχθεί ότι η εξίσωση: $(x+1)\cdot 3^{x+1}-1=0\,(-1,0)$ έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα στο διάστημα $(-1,0)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση
$f(x)=(x+1)\cdot 3^{x+1}-1$ στο $[-1,0]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[-1,0]\subseteq\mathbb{R}$ ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων
- $f(-1)=-1<0$ και $f(0)=2>0$.

Άρα (από το Θ. Bolzano) προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$, δηλαδή η εξίσωση: $f(x)=0\Leftrightarrow(x+1)\cdot 3^{x+1}-1=0$ έχει στο $(-1,0)$ μια τουλάχιστον ρίζα.

Άσκηση 6/Α΄ Ομάδας (σελ. 198)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=x$ και $g(x)=$ συν$2x$ τέμνονται σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη στο διάστημα $\left(0,\frac{\pi}{4}\right)$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$h(x)=f(x)-g(x)=x-\text{συν}2x$ στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

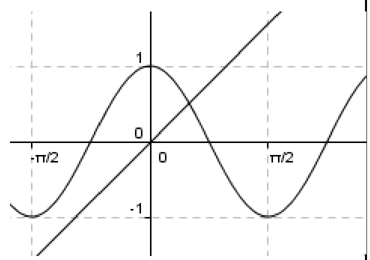
- Η h είναι συνεχής στο $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]\subseteq\mathbb{R}$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

- $h(0) = -1 < 0$ και $h\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} > 0$.

Άρα (από το Θ. Bolzano) προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε,

$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) - g(x_0) = 0 \Leftrightarrow f(x_0) = g(x_0)$

δηλαδή οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται τουλάχιστον σε ένα σημείο με τετμημένη στο $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$.



Άσκηση 4/Β΄ Ομάδας (σελ. 199)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Θεωρούμε την εξίσωση:
$\mathbf{x^4 + (\alpha^2 - 2)x^2 + (\alpha - 1)x - \alpha^2 = 0}$ **, α ≠ 0, έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0, 2).**
(Παραμετρική εξίσωση)

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση:
$f(x) = x^4 + (\alpha^2 - 2)x^2 + (\alpha - 1)x - \alpha^2$ στο $[0, 2]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[0, 2]$ ως πολυωνυμική.
- $f(0) = -\alpha^2 < 0$ και $f(2) = 3\alpha^2 + 2\alpha + 6 > 0$
  (το τριώνυμο έχει διακρίνουσα αρνητική άρα έχει θετικές τιμές για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ *)*

Άρα (από το θ. Bolzano) προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0, 2)$: $f(x_0) = 0$ δηλαδή η εξίσωση

$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^4 + (\alpha^2 - 2)x^2 + (\alpha - 1)x - \alpha^2 = 0$

έχει στο (0, 2) μια τουλάχιστον ρίζα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:
$\mathbf{\frac{x^4 + 1}{x - 1} + \frac{x^6 + 1}{x - 2} = 0}$ **έχει στο διάστημα** $\mathbf{(1, 2)}$ **μια τουλάχιστον ρίζα.**

Λύση

Για κάθε $x \neq 1, 2$ ισχύει:

$$\frac{x^4 + 1}{x - 1} + \frac{x^6 + 1}{x - 2} = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x - 2)(x^4 + 1) + (x - 1)(x^6 + 1) = 0$$

Θεωρούμε τα συνάρτηση:
$f(x) = (x - 2)(x^4 + 1) + (x - 1)(x^6 + 1)$ στο $[1, 2]$.

- Η f είναι συνεχής στο $[1, 2]$ ως πολυωνυμική,
- $f(1) = -2 < 0$ και $f(2) = 65 > 0$.

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (1, 2)$ ώστε να ισχύει:

$$f(x_0) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x_0 - 2)(x_0^4 + 1) + (x_0 - 1)(x_0^6 + 1) = 0 \underset{\div (x_0 - 2)(x_0 - 1)}{\overset{x_0 \neq 1, 2}{\Leftrightarrow}}$$
$$\frac{(x_0 - 2)(x_0^4 + 1)}{(x_0 - 1)(x_0 - 2)} + \frac{(x_0 - 1)(x_0^6 + 1)}{(x_0 - 1)(x_0 - 2)} = 0 \Leftrightarrow$$
$$\frac{x_0^4 + 1}{x_0 - 1} + \frac{x_0^6 + 1}{x_0 - 2} = 0.$$

Άρα η εξίσωση $\frac{x^4 + 1}{x - 1} + \frac{x^6 + 1}{x - 2} = 0$ έχει στο διάστημα $(1, 2)$ μια τουλάχιστον ρίζα.

2η) Αν ζητείται να αποδείξουμε ότι υπάρχει ακριβώς μία λύση της εξίσωσης $\mathbf{f(x) = 0}$ ***σ' ένα διάστημα*** $\mathbf{(\alpha, \beta)}$***, τότε αποδεικνύουμε την ύπαρξη της ρίζας με Bolzano και στη συνέχεια την μοναδικότητά της συνήθως αποδεικνύοντας ότι συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1».***

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να δειχθεί ότι η εξίσωση: $\ln x + \alpha x = 0$ με $0 < \alpha < e$ έχει μια μόνο ρίζα στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \ln x + \alpha x$ στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- $f\left(\frac{1}{e}\right) = -1 + \frac{\alpha}{e} = \frac{-e+\alpha}{e} < 0$, $f(1) = \alpha > 0$.

Άρα (από το Θ. Bolzano) προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ τέτοιο ώστε, $f(x_0) = 0$, δηλαδή η εξίσωση: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x + \alpha x = 0$ έχει στο $\left(\frac{1}{e}, 1\right)$ μια τουλάχιστον ρίζα.

Όμως, για κάθε $x \in \left(\frac{1}{e}, 1\right)$ $f'(x) = \frac{1}{x} + \alpha > 0$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ οπότε και «1-1». Επομένως η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

(*Μονοτονία χωρίς παραγώγους*: Έστω $\frac{1}{e} < x_1 < x_2 < 1 \underset{\alpha>0}{\overset{\ln\nearrow}{\Rightarrow}} \ln x_1 < \ln x_2$ και $\alpha x_1 < \alpha x_2 \Rightarrow$ $\ln x_1 + \alpha x_1 < \ln x_2 + \alpha x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$)

3η) Αν ζητείται να αποδείξουμε την ύπαρξη δυο τουλάχιστον ριζών μιας εξίσωσης: $\mathbf{f(x) = 0}$ σ' ένα διάστημα (α, β) τότε εφαρμόζουμε θ. Bolzano σε δύο ξένα μεταξύ τους υποσύνολα του διαστήματος $[\alpha, \beta]$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

Ν' αποδειχθεί ότι η εξίσωση: $4x^3 + 6 = 3x^2 + 8x$ έχει στο διάστημα (0, 2) δυο τουλάχιστον ρίζες.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 4x^3 + 6 - 3x^2 - 8x$ στο $[0,1]$ και στο $[1,2]$

- Η f είναι συνεχής στο $[0,1]$ και στο $[1,2]$ ως πολυωνυμική συνάρτηση.
- $f(0) = 6 > 0$, $f(1) = -1 < 0$ και $f(2) = 12 > 0$

Άρα (από το Θ. Bolzano) προκύπτει ότι υπάρχουν τουλάχιστον ένα $x_1 \in (0,1)$ και ένα $x_2 \in (1,2)$ τέτοια ώστε $f(x_1) = f(x_2) = 0$ δηλαδή η εξίσωση:

$f(x) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 6 - 3x^2 - 8x = 0$
$\Leftrightarrow 4x^3 + 6 = 3x^2 + 8x$ έχει στο (0, 2) δύο τουλάχιστον ρίζες.

4η) Αν ζητείται να αποδείξουμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον ρίζας μιας εξίσωσης: $\mathbf{f(x) = 0}$ σ' ένα διάστημα της μορφής: $(\alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta)$, $[\alpha, \beta]$ τότε,τουλάχιστον ένα από τα: $f(\alpha), f(\beta)$ θα είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το μηδέν ή μικρότερο ή ίσο με το μηδέν. Οπότε θα διακρίνουμε περιπτώσεις. Αν δεν είναι μηδέν θα εφαρμόσουμε θ. Bolzano, αν είναι μηδέν τότε η εξίσωση: $\mathbf{f(x) = 0}$ θα έχει ρίζα έναν τουλάχιστον από τα α, β .

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Ν' αποδειχθεί ότι για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ η εξίσωση: $\eta\mu x + x = \frac{\pi}{2} + \eta\mu\alpha$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$f(x) = \eta\mu x + x - \frac{\pi}{2} - \eta\mu\alpha$ στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ως άθροισμα συνεχών συναρτήσεων.
- $f(0) = \eta\mu 0 + 0 - \frac{\pi}{2} - \eta\mu\alpha = -\frac{\pi}{2} - \eta\mu\alpha < 0$,

$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \eta\mu\alpha = 1 - \eta\mu\alpha \geqslant 0$

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η : Αν $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow 1 - \eta\mu\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$ $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε η εξίσωση (1) έχει ρίζα το $\frac{\pi}{2}$.

2η : Αν $f\left(\frac{\pi}{2}\right) \neq 0 \Leftrightarrow \alpha \neq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2}$, $\kappa \in \mathbb{Z}$ τότε θα ισχύει $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$ δηλαδή $f(0)\cdot f\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0$. Τότε, από το θ. Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$: $f(x_0) = 0$ δηλαδή η εξίσωση: $f(x) = 0 \Leftrightarrow$

$\eta\mu x + x - \frac{\pi}{2} - \eta\mu\alpha = 0 \Leftrightarrow \quad \eta\mu x + x = \frac{\pi}{2} + \eta\mu\alpha$

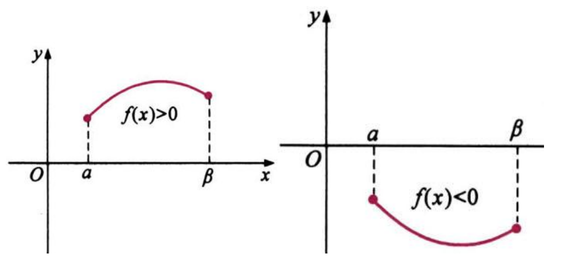
έχει στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ μια τουλάχιστον ρίζα.

Άρα: Η εξίσωση: $\eta\mu x + x = \frac{\pi}{2} + \eta\mu\alpha$ έχει στο $\left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ μια τουλάχιστον ρίζα για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.

5η) Με τη βοήθεια του θ. Bolzano μπορούμε να προσδιορίσουμε το πρόσημο μιας παράστασης ή καλύτερα τα διαστήματα που η παράσταση αυτή είναι θετική ή αρνητική . Δηλαδή μπορούμε να λύνουμε ανισώσεις.

Βασιζόμαστε στη πρόταση ότι:

«Σε κάθε διάστημα που μια συνεχής συνάρτηση δεν μηδενίζεται, διατηρεί πρόσημο »



με αποτέλεσμα

«μια συνεχής συνάρτηση να διατηρεί πρόσημο σε κάθε διάστημα που σχηματίζουν οι διαδοχικές ρίζες της»

(βλέπε σχόλιο σχολικού βιβλίου σελίδα 192)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να λυθεί η ανίσωση: $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x > 0$ στο $[0, 2\pi]$.

Λύση

Κατ' αρχήν θα λύσουμε την εξίσωση: $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0$ στο $[0, 2\pi]$.

$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x = 0 \Leftrightarrow \ldots \overset{x \in [0,2\pi]}{\Leftrightarrow} x = \frac{3\pi}{4}$ ή $x = \frac{7\pi}{4}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x$ στο $[0, 2\pi]$ και με τη βοήθεια του προσήμου της τιμής της f σε τυχαία επιλεγμένο αριθμό x_0 σε κάθε διάστημα των διαδοχικών ριζών της εξίσωσης θα προσδιορίσουμε το πρόσημό της σε καθένα από αυτά.

διάστημα	$\left[0, \frac{3\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$	$\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$
x_0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{11\pi}{6}$
$f(x_0)$	$1 > 0$	$-1 < 0$	$-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$
Πρόσημο f(x)	+	-	+

(Στα διαστήματα $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right)$ και $\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$ μπορούσαμε να είχαμε χρησιμοποιήσει και τα άκρα: 0 ή 2π). Άρα:

$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x > 0$ για $x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right) \cup \left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right]$.

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΠΟΥ ΕΙΝΑΙ ΣΥΝΕΧΗΣ...

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f για την οποία ισχύει: $f^2(x) = x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρεθεί ο τύπος της f και να γίνει η γραφική της παράσταση.

Λύση

1ον) Βρίσκουμε τις ρίζες της.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow f^2(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

β) Επειδή η f είναι συνεχής και δεν μηδενίζεται στα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ θα διατηρεί σε κάθε ένα από αυτά σταθερό πρόσημο. Δηλαδή θα ισχύει:

1η περίπτωση: $f(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$

2η περίπτωση: $f(x) > 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$

3η περίπτωση: $f(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f(x) > 0$ στο $(0, +\infty)$

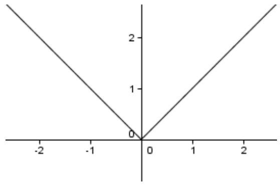
4η περίπτωση: $f(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $f(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$.

γ) $f^2(x) = x^2 \Leftrightarrow \left(f(x) = x \text{ ή } f(x) = -x\right)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για κάθε μια από τις παραπάνω περιπτώσεις έχουμε:

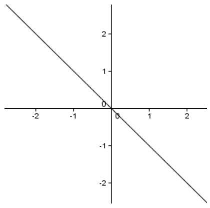
1η περίπτωση:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ x & , x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = |x|}, x \in \mathbb{R}$$



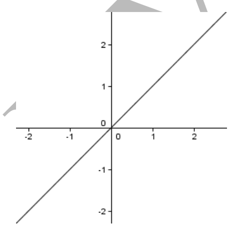
2η περίπτωση:

$$f(x) = \begin{cases} -x & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = -x}, x \in \mathbb{R}$$



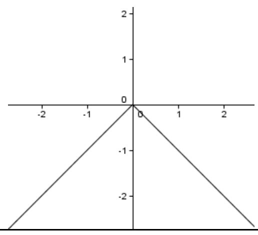
3η περίπτωση:

$$f(x) = \begin{cases} x & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ x & , x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = x}, x \in \mathbb{R}$$



4η περίπτωση:

$$f(x) = \begin{cases} x & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ -x & , x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{f(x) = -|x|}, x \in \mathbb{R}$$

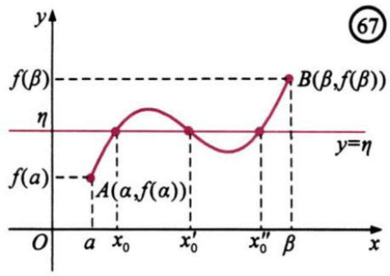


Β. ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ

Αν μια συνάρτηση f ορισμένη στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$,

- είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

τότε για κάθε αριθμό η μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$, υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$ έτσι ώστε $f(x_0) = \eta$.

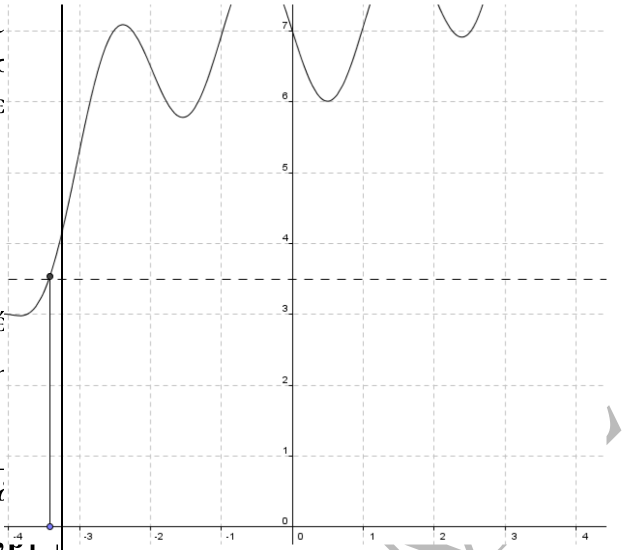


Η **απόδειξη** του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμ γίνεται με το θ. Bolzano. Πράγματι, Έσ $f(\alpha)<f(\beta)$ οπότε $f(\alpha)<\eta<f(\beta)$ Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=f(x)-\eta$, στο $[\alpha,\beta]$.

- Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$.
- $g(\alpha)=f(\alpha)-\eta<0$ και $g(\beta)=f(\beta)-\eta>$

Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)$ έ ώστε $g(x_0)=0 \Leftrightarrow f(x_0)-\eta=0 \Leftrightarrow f(x_0)=\eta$

Όμοια αν $f(\alpha)>f(\beta)$.



> ➤ ***Με το θεώρημα ενδιαμέσων τιμών αποδ κνύεται ότι μια συνεχή συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$.***

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 10

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{x^3}{16}-\eta\mu\pi x+7$ στο $[-4, 4]$. Δείξτε ότι η f παίρνει την τιμή $\dfrac{7}{2}$ στο $(-4, 4)$.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-4, 4]$ (ως αποτέλεσμα πράξεων συνεχών συναρτήσεων). Επίσης ισχύει: $f(-4)=3$, $f(4)=11$. Σύμφωνα με το θ. Ενδιάμεσων Τιμών επειδή ο $\dfrac{7}{2}$ βρίσκεται μεταξύ του 3 και του 11 δηλ. $f(-4)<\dfrac{7}{2}<f(4)$ θα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(-4, 4)$: $f(x_0)=\dfrac{7}{2}$. Δηλαδή η συνάρτηση f παίρνει την τιμή $\dfrac{7}{2}$ στο $(-4, 4)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 11

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα [0, 1] και γνησίως αύξουσα σ' αυτό. Αν $f(0)=2$ και $f(1)=4$, δείξτε ότι:

α. Η ευθεία $y=3$ τέμνει τη γραφική παράσταση της f σ' ένα ακριβώς σημείο με τετμημένη $x_0\in(0, 1)$.

β. Υπάρχει ένα ακριβώς $x_1\in(0, 1)$, τέτοιο ώστε

$$f(x_1)=\frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}.$$

ΘΕΜΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

Λύση

α) Επειδή $f(0)=2<3<f(1)=4$ ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. ενδιαμέσων τιμών οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0, 1)$, έτσι ώστε $f(x_0)=3$. Δηλαδή η γραφική παράσταση της f τέμνει την ευθεία $y=3$ τουλάχιστον σ' ένα σημείο με τετμημένη $x_0\in(0, 1)$. Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ θα είναι και «1-1», η ρίζα x_0 είναι μοναδική στο $(0,1)$.

β) Αρκεί να αποδείξουμε ότι ο αριθμός: $\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$ είναι μεταξύ των $f(0)=2$ και $f(1)=4$.

Πράγματι,

$$0<\frac{1}{5}<1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(0)<f\left(\frac{1}{5}\right)<f(1)$$

$$0<\frac{2}{5}<1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(0)<f\left(\frac{2}{5}\right)<f(1)$$

$$0<\frac{3}{5}<1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(0)<f\left(\frac{3}{5}\right)<f(1)$$

$$0<\frac{4}{5}<1\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(0)<f\left(\frac{4}{5}\right)<f(1)$$

Με πρόσθεση κατά μέλη των παραπάνω ανισοτήτων προκύπτει ότι:

$$4f(0)<f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)<4f(1)\Leftrightarrow$$

$$f(0)<\frac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}<f(1)$$

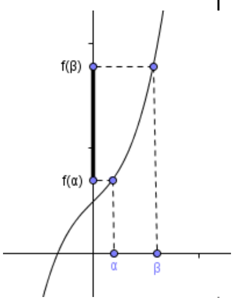
Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(0,\,1)$, έτσι ώστε , $f(x_1)=\dfrac{f\left(\frac{1}{5}\right)+f\left(\frac{2}{5}\right)+f\left(\frac{3}{5}\right)+f\left(\frac{4}{5}\right)}{4}$.

Επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ θα είναι και «1-1», η ρίζα x_1 είναι μοναδική στο $(0,1)$.

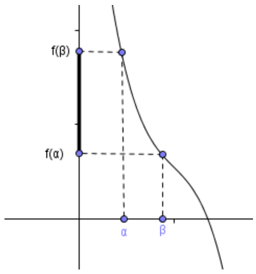
> ➢ ***Με το θ. ενδιαμέσων τιμών αποδεικνύεται επίσης ότι το διάστημα $[f(\alpha),f(\beta)]$ αν $f(\alpha)<f(\beta)$ ή το $[f(\beta),f(\alpha)]$ αν $f(\alpha)>f(\beta)$ είναι υποσύνολο του συνόλου τιμών της.***

Μπορούμε όμως να βρούμε το ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ;

- Αν η συνάρτηση είναι και **γνησίως αύξουσα** στο $[\alpha,\beta]$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[f(\alpha),f(\beta)]$ ενώ



- Αν η συνάρτηση είναι και **γνησίως φθίνουσα** στο $[\alpha,\beta]$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $[f(\beta),f(\alpha)]$.



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 12

Να βρείτε το σύνολο τιμών της $f(x)=\ln x-1$ στο $[1,e]$

ΛΥΣΗ

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,e]$ (ως διαφορά συνεχών)
- $f'(x)=(\ln x-1)'=\frac{1}{x}>0$ για κάθε $x\in(1,e)$.

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,e]$

Οπότε: Το σύνολο τιμών της είναι: $f(A)=[f(1),f(e)]=[\ln 1-1,\ln e-1]=\boxed{[-1,0]}$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 13

Να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της συνάρτησης: $f(x) = 2ημx – 3συνx$,

$$x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$$

Λύση

Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$.

Επίσης $f'(x)=2συνx+3ημx>0$ για κάθε $x\in\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3}\right]$. Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το διάστημα:

$$\left[f\left(\frac{\pi}{6}\right),f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]=\left[1-\frac{3\sqrt{3}}{2},\sqrt{3}-\frac{3}{2}\right].$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στα διαστήματα $[\alpha,\beta)$ ή $(\alpha,\beta]$ ή (α,β) τότε τα ανοιχτά άκρα του συνόλου τιμών αντικαθίστανται με τα όρια: $\lim_{x\to\alpha^+} f(x)$ και $\lim_{x\to\beta^-} f(x)$.

Αντίστοιχα συμπεράσματα ισχύουν αν τα άκρα είναι $+\infty$ ή $-\infty$ οπότε τα άκρα γίνονται $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Έτσι, για παράδειγμα,

- ✓ **αν μια συνάρτηση είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο διάστημα (α,β) τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα.$\left(\lim_{x\to\alpha^+} f(x),\ \lim_{x\to\beta^-} f(x)\right)$**
- ✓ **αν μια συνάρτηση είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $(\alpha,\beta]$ τότε το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $\left[f(\beta), \lim_{x\to\alpha^+} f(x)\right)$**

κ.λ.π.

ΥΠΑΡΞΗ ΡΙΖΑΣ ΜΕΣΩ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ ΤΙΜΩΝ (και όχι μόνο!)

Με τη βοήθεια του συνόλου τιμών θα αποδεικνύουμε την ύπαρξη ρίζας μιας εξίσωσης $f(x)=0$. Συγκεκριμένα, αν το σύνολο τιμών της συνεχούς συνάρτησης f είναι διάστημα που περιέχει το μηδέν τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ στο διάστημα που εργαζόμαστε.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 14

Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = \frac{1}{x}$, έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα $(0,+\infty)$.

Λύση

1^{ος} τρόπος: (ΜΕ ΣΥΝΟΛΟ ΤΙΜΩΝ)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ στο $(0,+\infty)$.

Η f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$ (ως πράξεις μεταξύ συνεχών συναρτήσεων).

Επίσης $f'(x)=\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)'=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$

Άρα το σύνολο τιμών της f είναι:

$$f(A)=\left(\lim_{x\to0^+} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right)=$$

$$=\left(\lim_{x\to0^+}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right),\lim_{x\to\infty}\left(\ln x-\frac{1}{x}\right)\right)...=(-\infty,+\infty)$$

Επειδή το $0\in f(A)$ υπάρχει τουλάχιστον μία ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0\Leftrightarrow \ln x-\frac{1}{x}=0$ στο $(0,+\infty)$ που είναι και μοναδική αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1-1».

2^{ος} τρόπος: (ΜΕ Θ. BOLZANO στο $[1,e]$)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ στο $(0,+\infty)$. Επειδή $f(1)=\ln1-1=-1<0$ και $f(e)=\ln e-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{e}=\frac{e-1}{e}>0$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[1,e]\subseteq(0,+\infty)$ από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(1,e)\subseteq(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0\Leftrightarrow \ln x_0-\frac{1}{x_0}=0\Leftrightarrow \ln x_0=\frac{1}{x_0}$. Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ άρα και «1-1», οπότε το x_0 είναι μοναδικό.

3^{ος} τρόπος: (ΜΕ Θ. BOLZANO στο $[\alpha,\beta]$)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$ στο $(0,+\infty)$. Επειδή $\lim_{x\to0^+} f(x)=...=-\infty$ υπάρχει ένα $\alpha>0$ (κοντά στο μηδέν) ώστε $f(\alpha)<0$. Επίσης, επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=...=+\infty$ υπάρχει ένα $\beta>0$ (μεγάλος αριθμός) ώστε $f(\beta)>0$. Από το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[\alpha,\beta]\subseteq(0,+\infty)$ προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)\subseteq(0,+\infty)$ τέτοιο ώστε: $f(x_0)=0\Leftrightarrow \ln x_0-\dfrac{1}{x_0}=0\Leftrightarrow \ln x_0=\dfrac{1}{x_0}$. (Για την μοναδικότητά της κατά τα γνωστά..)

Με την ευκαιρία αυτή (του 3ου τρόπου) , αναφέρουμε μια πρόταση πολύ χρήσιμη για την συνέχεια:

ΠΡΟΤΑΣΗ

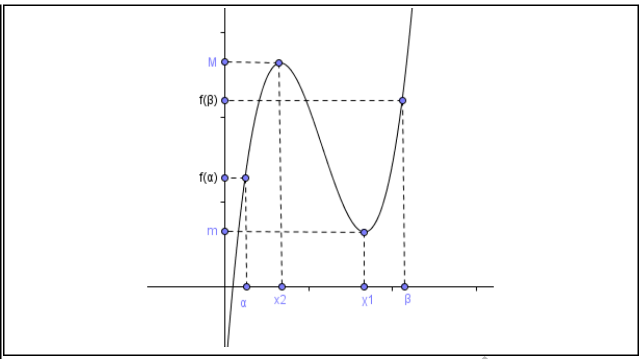
Ένα πολυώνυμο περιττού βαθμού έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα.

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=\alpha_\nu x^\nu+...+\alpha_1 x+\alpha_0$, με ν περιττό και $\alpha_\nu>0$. Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=...=-\infty$ υπάρχει ένα $\alpha<0$ (μικρός αριθμός) ώστε $f(\alpha)<0$. Επίσης, επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=...=+\infty$ υπάρχει ένα $\beta>0$ (μεγάλος αριθμός) ώστε $f(\beta)>0$. Από το θεώρημα Bolzano στο διάστημα $[\alpha,\beta]\subseteq\mathbb{R}$ προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(\alpha,\beta)\subseteq\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$. Άρα το πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+...+\alpha_1 x+\alpha_0$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα.

Γ. ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΟΥ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΟΥ

Αν μια συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $[\alpha,\beta]$ τότε υπάρχουν τουλάχιστον δύο αριθμοί $x_1,x_2\in[\alpha,\beta]$ τέτοιοι ώστε $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ Δηλαδή η συνάρτηση παρουσιάζει στο $[\alpha,\beta]$ ελάχιστη ($f(x_1)=m$) και μέγιστη ($f(x_2)=M$) τιμή.



Σημείωση

Εφαρμόζοντας το θ. ενδιαμέσων τιμών στα διαστήματα $[\alpha,x_2]$ και $[x_1,\beta]$ αποδεικνύεται ότι η συνάρτηση f παίρνει όλες τις ενδιάμεσες τιμές μεταξύ των αριθμών m, f(α) και f(β), M.

Άρα:

Η συνεχής συνάρτηση f στο $[\alpha,\beta]$ έχει σύνολο τιμών **διάστημα** το $[m,M]$.

Αν $m=M$ τότε η συνάρτηση f είναι σταθερή και το σύνολο τιμών της είναι ο αριθμός m ή M.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν στις ασκήσεις που μας ζητούν να αποδείξουμε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένας αριθμός $x_0\in[\alpha,\beta]$ ώστε να ισχύει: $f(x_0)=\eta$ όπου f συνεχής συνάρτηση στο $[\alpha,\beta]$ και ο αριθμός η δεν μπορεί να αποδειχθεί ότι βρίσκεται μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ τότε αποδεικνύουμε ότι $m\le\eta\le M$,όπου m και M η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της συνάρτησης.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15

Αν f συνάρτηση συνεχής στο [α, β], να αποδείξετε ότι υπάρχει $x_0\in$ [α, β]:

$$f(x_0)=\frac{1}{6}\left[f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)\right].$$

Λύση

Φυσικά η άσκηση αυτή δεν μπορεί να λυθεί με θ. Ενδιάμεσων Τιμών γιατί δεν έχουμε στοιχεία να αποδείξουμε ότι ο αριθμός: $\frac{1}{6}\left[f(\alpha)+2f\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)+3f(\beta)\right]$ να είναι μεταξύ των f(α) και f(β).

Όμως αφού η f συνεχής στο [α, β] η f θα παρουσιάζει ελάχιστη m και μέγιστη Μ τιμή στο [α, β]. Άρα για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ ισχύει: $m \leqslant f(x) \leqslant M$. Έτσι:

- $\alpha \in [\alpha, \beta] \Rightarrow m \leqslant f(\alpha) \leqslant M \quad (1).$
- $\dfrac{\alpha+\beta}{2} \in [\alpha, \beta] \Rightarrow m \leqslant f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \leqslant M \Leftrightarrow$

  $2m \leqslant 2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) \leqslant 2M \quad (2).$
- $\beta \in [\alpha, \beta] \Rightarrow m \leqslant f(\beta) \leqslant M \Leftrightarrow$
  $3m \leqslant 3f(\beta) \leqslant 3M \quad (3).$

  Προσθέτοντας τις (1), (2), (3) κατά μέλη προκύπτει ότι: $6m \leqslant f(\alpha) + 2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) + 3f(\beta) \leqslant 6M$

  δηλαδή: $m \leqslant \dfrac{f(\alpha) + 2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) + 3f(\beta)}{6} \leqslant M$. Άρα, υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in [\alpha, \beta]$

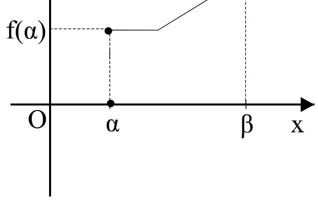
  $$f(x_0) = \frac{f(\alpha) + 2f\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2}\right) + 3f(\beta)}{6}.$$

Επίλογος

Στα θ. Bolzano, θ. Ενδιάμεσων Τιμών και θ. Μεγίστου – Ελαχίστου οι εφαρμογές είναι πάρα πολλές. Στο άρθρο που προηγήθηκε δόθηκαν μερικές βασικές εφαρμογές με σκοπό ν' αποτελέσουν παράδειγμα για τη λύση πολλών ασκήσεων τόσο του σχολικού όσο και άλλων βιβλίων.

Σχόλιο

Στη περίπτωση συνεχούς συνάρτησης στο [α, β] για προσδιορισμό του συνόλου τιμών της



Π.χ. Αν f συνεχής στο [α, β] και αύξουσα στο [α, β].

Τότε: f(A) = [f(α), f(β)].

Δεν συμβαίνει όμως το ίδιο αν η f ήταν συνεχής στο (α, β) και αύξουσα σ' αυτό. Τότε, αν η γραφική παράσταση της f ήταν όπως του σχήματος, το σύνολο τιμών της είναι:

$$f(A) = [\lim_{x \to \alpha} f(x), \lim_{x \to \beta} f(x))$$