ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 21 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α,β)

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ ;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

a) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho>0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ, όπου z_0, z μιγαδικοί αριθμοί.

(μονάδες 2)

b) Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha,x_0)\cup(x_0,\beta)$ Ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \iff \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty\right)$$

(μονάδες 2)

c) Αν είναι $0 < \alpha < 1$, τότε $\lim_{x\to -\infty} \alpha^x = 0$.

(μονάδες 2)

d) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ . Αν η f είναι κυρτή στο Δ , τότε υποχρεωτικά $f''(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ .

(μονάδες 2)

e) $$\left(\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt\right)' = f\left(g(x)\right) g'(x)$$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z και w για τους οποίους ισχύουν:

- $w = \dfrac{2z - i}{2z + i}$, $z \neq -\dfrac{i}{2}$
- w φανταστικός

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=\dfrac{1}{2}$, εκτός από το σημείο $M(0,-\dfrac{1}{2})$, του κύκλου

Μονάδες 10

B2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, του ερωτήματος B1, να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $|w| = 1$.

Μονάδες 8

B3. Αν είναι $z=\frac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι

$$w^4 + i\,w^7 = 0$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{\ell nx}{x}} & , \quad \alpha\nu \quad x>0 \\ 0 & , \quad \alpha\nu \quad x=0 \end{cases}$$

Γ1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Μονάδες 7

Γ3. **i)** Να αποδείξετε ότι, για $x > 0$, ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x) = f(4) \Leftrightarrow x^4 = 4^x$$

(μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4 = 4^x$, $x > 0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1=2$ και $x_2=4$

(μονάδες 6)

Μονάδες 8

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(2, 4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)\int_2^{\xi} f(t)dt = f(\xi)(\sqrt{2}-f(\xi))$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f: A \longrightarrow \mathbb{R}\ ,\ A =(0,+\infty)$$

με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε

$$e^{f(x)}\left(f(x)^2-2f(x)+3\right)=x$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 4) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3, δίνεται ότι

$$f^{-1}(x)=e^x\left(x^2-2x+3\right),\ x\in\mathbb{R}$$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. (μονάδες 3) Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα y΄y , και την ευθεία x = 1 (μονάδες 6)

Μονάδες 9

Δ3. Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A\left(x, f^{-1}(x)\right)$, $B\left(f^{-1}(x), x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1 (μονάδες 3)

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

(μονάδες 6)

Μονάδες 9

ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία

Α2. Θεωρία

Α3. Θεωρία

Α4. α)Σ β)Σ γ)Λ δ)Λ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. Έχουμε,

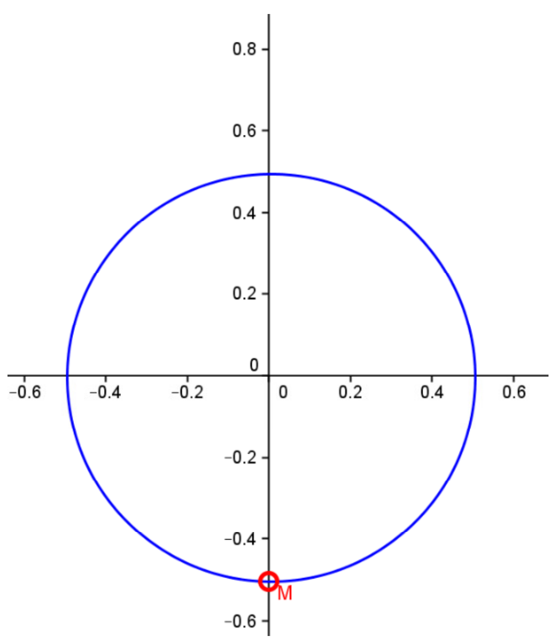
$$w \in \mathbb{I} \Leftrightarrow \overline{w} = -w \Leftrightarrow \overline{\left(\frac{2z-i}{2z+i}\right)} = -\frac{2z-i}{2z+i}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\overline{z}+i}{2\overline{z}-i} = \frac{i-2z}{2z+i}$$

$$\Leftrightarrow \left(2\overline{z}+i\right)\left(2z+i\right) = \left(i-2z\right)\left(2\overline{z}-i\right)$$

$$\Leftrightarrow \left|z\right| = \frac{1}{2}$$

δηλαδή ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z ανήκουν σε κύκλο με κέντρο το (0,0) και ακτίνα ρ = ½ , όμως το σημείο $\left(0,-\dfrac{1}{2}\right)$ ανήκει στον γεωμετρικό τόπο και επειδή είναι περιορισμός, πρέπει να το εξαιρέσουμε.



Β2. Έχουμε $\left|w\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2z-i}{2z+i}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|2z-i\right| = \left|2z+i\right|$

<u>Α΄ τρόπος:</u> Η τελευταία σχέση γίνεται,

$$\left|z-\frac{1}{2}i\right|=\left|z+\frac{1}{2}i\right|$$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του z βρίσκονται στην μεσοκάθετο των σημείων Γ(0, ½) και Μ(0, - ½) που είναι ο άξονας x΄x δηλαδή η ευθεία y = 0.
Άρα τα κοινά σημεία τομής της μεσοκαθέτου και του κύκλου είναι τα ζητούμενα σημεία (½ ,0) και (-½, 0).

__Β΄ τρόπος:__ Με πράξεις έχουμε,

$$|2z-i|=|2z+i|\Leftrightarrow|2z-i|^2=|2z+i|^2$$

$$\Leftrightarrow(2z-i)\overline{(2z-i)}=(2z+i)\overline{(2z+i)}$$

$$\Leftrightarrow z=\bar{z}$$

Β3. **__Α΄ τρόπος (έξυπνος / σύντομος):__** Έχουμε,

$$w=\frac{1-i}{1+i}=\frac{-i^2-i}{1+i}=\frac{-i(1+i)}{1+i}=-i$$

άρα $w^4+i\cdot w^7=(-i)^4+i(-i)^7=1+i\cdot(-i)^3=1+i\cdot i=1-1=0$

__Β΄ τρόπος (κλασικός):__ Έχουμε,

$$w=\frac{1-i}{1+i}=\frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-2i-1}{1-i^2}=\frac{-2i}{2}=-i$$

άρα …

__Γ΄ τρόπος (περίεργος)__: Έχουμε, $|w|=1\Leftrightarrow w\cdot\bar{w}=1$, οπότε η ζητούμενη σχέση γράφεται ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}w^4+i\cdot w^7=0&\Leftrightarrow w^4\cdot\bar{w}^7+i\cdot w^7\cdot\bar{w}^7=0\\&\Leftrightarrow(w\cdot\bar{w})^4\cdot\bar{w}^3+i\cdot(w\cdot\bar{w})^7=0\\&\Leftrightarrow\bar{w}^3+i=0\\&\Leftrightarrow\bar{w}^3=-i\\&\Leftrightarrow w^3=i\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3=i\Leftrightarrow.....\Leftrightarrow\frac{1+i}{1-i}=i\Leftrightarrow1+i=i(1-i)\Leftrightarrow1+i=i-i^2\text{ που ισχύει…}$$

Θέμα Γ

Γ1. Έχουμε, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim\limits_{u\to -\infty} e^{u} = 0 = f(0)$, αφού

$\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\ln x \cdot \dfrac{1}{x}\right) = (-\infty)(+\infty) = -\infty$, άρα η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$.

Γ2. Για κάθε x > 0 έχουμε,

$$f'(x) = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \left(\frac{1-\ln x}{x^2}\right)$$

Πίνακας μεταβολών

x	0 $\quad$ **2** $\quad$ e $\quad$ **4** $\quad$ $+\infty$	
f'	$+$	$-$
f	$0 \nearrow e^{\frac{1}{e}}$	$e^{\frac{1}{e}} \searrow 1$

όπου f(0)= 0, $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$ και $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim\limits_{u\to 0} e^{u} = 1$, αφού $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x} = 0$,

άρα το σύνολο τιμών της f είναι, $f(A) = \left[0, e^{\frac{1}{e}}\right] \cup \left(1, e^{\frac{1}{e}}\right] = \left[0, e^{\frac{1}{e}}\right]$.

Γ3. i) Έχουμε,

$$\begin{aligned} f(x) = f(4) &\Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} = e^{\frac{\ln 4}{4}} \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln x}{x} = \frac{\ln 4}{4} \\ &\Leftrightarrow 4 \cdot \ln x = x \cdot \ln 4 \\ &\Leftrightarrow \ln x^4 = \ln 4^x \\ &\Leftrightarrow x^4 = 4^x \end{aligned}$$

ii) Αρχικά θα δείξουμε ότι: $\boxed{f(2) = f(4) = \sqrt{2}}$ (1).

Έχουμε,

$$f(4) = e^{\frac{\ln 4}{4}} = e^{\frac{\ln 2^2}{2}} = e^{\frac{2\ln 2}{4}} = e^{\frac{\ln 2}{2}} = f(2),$$

όμως $f(2) = e^{\frac{\ln 2}{2}} = \left(e^{\ln 2}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, οπότε ισχύει η σχέση (1).

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

I) $x \in (0, e]$

Έχουμε: $f(x)=f(4)\overset{(1)}{=}f(2)\Rightarrow f(x)=f(2)$ με $x,2\in(0,e]$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $(0,e]$ προκύπτει ότι x = 2. Έτσι στο $(0,e]$ η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, το $x_1=2$.

ΙΙ) $x\in(e,+\infty)$

Έχουμε, $f(x)=f(4)$ με $x,4\in(e,+\infty)$ και επειδή η f είναι γνησίως μονότονη στο $(e,+\infty)$ προκύπτει ότι
x = 4. Επομένως στο $(e,+\infty)$ η δοθείσα εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση, το $x_2=4$.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η εξίσωση $x^4=4^x$, $x>0$ έχει ακριβώς δύο λύσεις τους αριθμούς $x_1=2,\ x_2=4$.

Γ4.

Πορεία σκέψης (κινήσεις στο πρόχειρο…)

Η εξίσωση γράφεται, θεωρώντας το ξ μεταβλητή,

$$f'(\xi)\cdot\int_2^{\xi} f(t)\,dt=f(\xi)\left(\sqrt{2}-f(\xi)\right)\Rightarrow f'(\xi)\cdot\int_2^{\xi} f(t)\,dt-f(\xi)\left(\sqrt{2}-f(\xi)\right)=0$$

$$\Rightarrow f'(\xi)\cdot\int_2^{\xi} f(t)\,dt+f(\xi)\cdot\left(f(\xi)-\sqrt{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \left(f(\xi)-\sqrt{2}\right)'\cdot\int_2^{\xi} f(t)\,dt+\left(\int_2^{\xi} f(t)\,dt\right)'\cdot\left(f(\xi)-\sqrt{2}\right)=0$$

$$\Rightarrow \left[\left(f(\xi)-\sqrt{2}\right)\int_2^{\xi} f(t)\,dt\right]'=0$$

(τώρα γράφουμε την επίσημη λύση μας…)

Έστω συνάρτηση $\boxed{h(x)=\left(f(x)-\sqrt{2}\right)\int_2^{x} f(t)\,dt,\ x>0,}$ τότε:

- η h είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $h'(x)=f'(x)\cdot\int_2^{x} f(t)\,dt-f(x)\left(\sqrt{2}-f(x)\right)$

- $h(2) = \left(f(2) - \sqrt{2}\right)\int_2^2 f(t)\,dt = 0 \cdot 0 = 0$

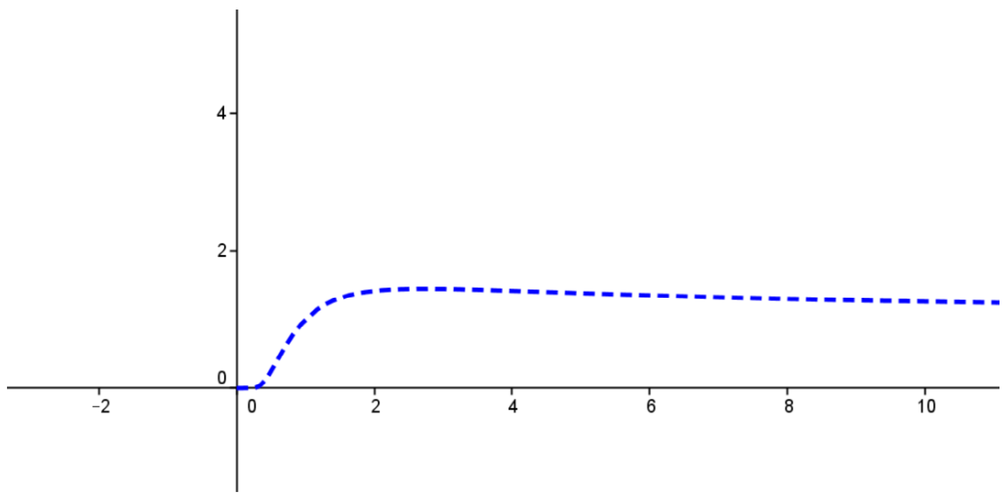
- $h(4) = \left(f(4) - \sqrt{2}\right)\int_2^4 f(t)\,dt = 0 \cdot \int_2^4 f(t)\,dt = 0 = h(2)$

άρα ικανοποιούνται οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος Rolle στο διάστημα [2, 4], οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2, 4)$ τέτοιο ώστε

$$h'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot \int_2^\xi f(t)\ dt - f(\xi)\left(\sqrt{2} - f(\xi)\right) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot \int_2^\xi f(t)\ dt = f(\xi)\left(\sqrt{2} - f(\xi)\right)$$

Σημείωση: Στο ερώτημα Γ3 υπάρχει ίδια σκέψη στο διαγώνισμα του **Νίκου Ζανταρίδη**, δείτε το, ήταν από τα προτεινόμενα θέματα για τις εξετάσεις του 2014.

Επίσης για να έχουμε μια εποπτική εικόνα της δεδομένης συνάρτησης, δίνουμε το σχήμα της



Θέμα Δ

Δ1. **Α΄ τρόπος (κατασκευαστικός)**: Για $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ έχουμε, $f(x_1) = f(x_2)$, θα δείξουμε ότι $x_1 = x_2$.

Έχουμε,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow f^2(x_1) = f^2(x_2) \quad (1)$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow -2f(x_1) = -2f(x_2) \Rightarrow -2f(x_1) + 3 = -2f(x_2) + 3 \ (2)$$

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow e^{f(x_1)} = e^{f(x_2)} \quad (3)$$

αν προσθέσουμε κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) και στη συνέχεια την πολ/με με την σχέση (3) έπεται,

$$e^{f(x_1)}\left(f^2(x_1)-2f(x_1)+3\right)=e^{f(x_2)}\left(f^2(x_2)-2f(x_2)+3\right)\Rightarrow x_1=x_2$$

δηλαδή η f είναι 1 – 1.

<u>Β΄ τρόπος (με μονοτονία):</u> Για κάθε x > 0, έχουμε, $e^{f(x)}\left(f^2(x)-2f(x)+3\right)=x$, παραγωγίζουμε ως προς x και τα δύο μέλη,

$$\left[e^{f(x)}\left(f^2(x)-2f(x)+3\right)\right]'=(x)'\Rightarrow e^{f(x)}\cdot f'(x)\left(f^2(x)-2f(x)+3\right)+e^{f(x)}\left(2f(x)f'(x)-2f'(x)\right)=1$$

$$\Rightarrow e^{f(x)}\cdot f'(x)\left(f^2(x)\cancel{-2f(x)}+3+\cancel{2f(x)}-2\right)=1$$

$$\Rightarrow e^{f(x)}\cdot f'(x)\left(f^2(x)+1\right)=1$$

$$\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{e^{f(x)}\left(f^2(x)+1\right)}>0$$

η f είναι γνησίως αύξουσα άρα είναι και 1 – 1 .

Εύρεση της αντίστροφης

Θέτουμε $f(x)=y$, άρα η δεδομένη σχέση γίνεται *(αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, η εξίσωση f(x) = y έχει για κάθε* $y\in\mathbb{R}$ *το πολύ μια λύση. Μια λύση είναι* $e^{f(x)}\left(f^2(x)-2f(x)+3\right)=x\ \ (1)$ *οπότε η λύση είναι μοναδική),* $e^{y}\left(y^2-2y+3\right)=x\overset{x=f^{-1}(y)}{\Rightarrow}f^{-1}(y)=e^{y}\left(y^2-2y+3\right),\ y\in\mathbb{R}$

δηλαδή $f^{-1}(x)=e^{x}\left(x^2-2x+3\right),\ x\in\mathbb{R}$.

Σημείωση: *Σε αυτό το σημείο, ο συνάδελφος **Παύλος Σταυρόπουλος** σημειώνει μια πιο πειστική λύση για την εύρεση της αντίστροφης, όπως και την πρόσθεση των κόκκινων γραμμάτων που μας πρότεινε να προσθέσουμε στην υπάρχουσα λύση μας.*

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{x}\left(x^2-2x+3\right),\ x\in(0,+\infty)$.

Εύκολα αποδεικνύουμε ότι είναι γνησίως αύξουσα *(δες β΄ τρόπο παραπάνω)* άρα και 1 – 1.

Επομένως η σχέση $e^{f(x)}\left(f^2(x)-2f(x)+3\right)=x\ \ (1)$ γράφεται $h(f(x))=x\ \ (2)$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$.

Άρα, έχουμε, $f(x)=y\overset{h:1-1}{\Leftrightarrow}h(f(x))=h(y)\overset{(2)}{\Leftrightarrow}x=e^{y}\left(y^2-2y+3\right),\ y\in\mathbb{R}$, οπότε η αντίστροφη της συνάρτησης f είναι η $f^{-1}(y)=e^{y}\left(y^2-2y+3\right),\ y\in\mathbb{R}$.

Δ2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε,

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \left(e^x\right)'\left(x^2 - 2x + 3\right) + e^x\left(x^2 - 2x + 3\right)'$$

$$= e^x\left(x^2 - 2x + 3\right) + e^x\left(2x - 2\right)$$

$$= e^x\left(x^2 + 1\right) > 0$$

και

$$\begin{aligned}\left(f^{-1}(x)\right)'' &= \left(e^x\right)'\left(x^2 + 1\right) + e^x\left(x^2 + 1\right)' \\ &= e^x\left(x^2 + 1\right) + 2xe^x \\ &= e^x\left(x^2 + 2x + 1\right) \\ &= e^x\left(x + 1\right)^2 \geq 0\end{aligned}$$

άρα η f^{-1} είναι κυρτή.

Αρχικά η γραφική παράσταση της συνάρτησης f τέμνει τον άξονα y΄y για x = 0,

$$f^{-1}(0) = e^0\left(0^2 - 2\cdot 0 + 3\right) = 3,\ \text{δηλαδή στο σημείο } (0, 3).$$

Η εξίσωση της εφαπτομένης της f^{-1} στο σημείο (0, 3) είναι:

$$y - 3 = 1\cdot\left(x - 0\right) \Rightarrow y = x + 3 \quad (\varepsilon).$$

Επειδή η f είναι κυρτή και η ευθεία (ε) είναι εφαπτομένη της, καταλαβαίνουμε ότι η C_f βρίσκεται πιο ψηλά, εκτός από το σημείο επαφής, από την ευθεία (ε), οπότε το ζητούμενο εμβαδόν ισούται

$$E = \int_0^1 \left[f(x) - (x+3)\right]dx = \int_0^1 \left(x^2e^x - 2xe^x + 3e^x - x - 3\right)dx = \int_0^1 x^2e^x dx - 2\int_0^1 xe^x dx + 3\int_0^1 e^x - \int_0^1 xdx - \int_0^1 3dx$$

- $\int_0^1 x^2e^x dx = \left[x^2e^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 xe^x dx = e - 2\left(\left[xe^x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right) = e - 2[e - (e-1)] = e - 2$.
- $2\int_0^1 xe^x dx = 2\left[xe^x\right]_0^1 - 2\int_0^1 e^x dx = 2e - 2(e-1) = 2$.
- $3\int_0^1 e^x dx = 3e - 3$.
- $\int_0^1 xdx = \frac{1}{2}$.
- $\int_0^1 3dx = 3$.

Επομένως το εμβαδόν είναι ίσο με $E = e - 2 - 2 + 3e - 3 - \frac{1}{2} - 3 = 4e - \frac{21}{2}$.

Δ3. i) Έχουμε,

$$f\left(f^{-1}(x)\right) = 1 \Rightarrow \left(f\left(f^{-1}(x)\right)\right)' = 1' \Rightarrow f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}(x)\right)' = 1.$$

<u>Β΄ τρόπος (με ορισμό της παραγώγου):</u>

Έχουμε,

$$(f^{-1})'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

οπότε παριστάνει το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της f^{-1} στο y_0 όπου $y_0 = f(x_0)$,

άρα $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f(x_0)} \Rightarrow (f^{-1})'(y_0) \cdot f'(x_0) = 1$

ii) **<u>Α΄ τρόπος (αλγεβρικά):</u>** Αναζητούμε την απόσταση,

$$(AB) = \sqrt{\left(f^{-1}(x) - x\right)^2 + \left(x - f^{-1}(x)\right)^2} = \sqrt{2} \cdot \left(f^{-1}(x) - x\right),$$

αφού $f^{-1}(x) \geq x + 3 > x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Οπότε αναζητούμε το ελάχιστο της συνάρτησης $k(x) = \sqrt{2} \cdot \left(f^{-1}(x) - x\right),\ \ x \in \mathbb{R}$.

Έχουμε,

$$k(x) = \sqrt{2} \cdot \left(f^{-1}(x) - x\right) = \sqrt{2}\left[e^x\left(x^2 - 2x + 3\right) - x\right]$$

$$k'(x) = \sqrt{2}\left[e^x\left(x^2 + 1\right) - 1\right]$$

$$k''(x) = \sqrt{2} \cdot e^x (x+1)^2 \geq 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

άρα η k΄ είναι γνησίως αύξουσα στο R.

- Για $x > 0$ έχουμε, $k'(x) > k'(0) = 0$, δηλαδή η k είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$
- Για $x < 0$ έχουμε, $k'(x) < k'(0) = 0$, δηλαδή η k είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$

x	$-\infty$ 0	$+\infty$
k'	−	+
k	↘	↗

Άρα για $x = 0$ η απόσταση γίνεται ελάχιστη, με ελάχιστη τιμή $k(0) = 3\sqrt{2}$.

Β΄ τρόπος (γεωμετρικός): Η ιδέα είναι η εξής, ξέρουμε ότι η C_f^{-1} είναι κυρτή και έχει εφαπτομένη την ευθεία y = x + 3, δηλαδή παράλληλη στην διχοτόμο της γωνίας του πρώτου τεταρτημορίου την y = x. Επίσης λόγω κυρτότητας της C_f^{-1} η γραφική της παράσταση βρίσκεται πάνω, εκτός του σημείο επαφής, από την εφαπτομένη, οπότε το πιο κοντινό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f^{-1}, με την ευθεία y = x είναι το σημείο (0, 3) που απέχει από την y = x, απόσταση

$$d\left(K,\varepsilon\right)\underset{y=\Leftrightarrow -x+y=0}{\overset{K(0,3)}{=}}\frac{\left|-0+3\right|}{\sqrt{1^1+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

Λόγω συμμετρικότητας και η γραφική παράσταση της συνάρτησης f απέχει από την ευθεία y = x απόσταση $\frac{3\sqrt{2}}{2}$, άρα η συνολική απόσταση των δύο γραφικών παραστάσεων είναι $\frac{3\sqrt{2}}{2}+\frac{3\sqrt{2}}{2}=3\sqrt{2}$.

<u>Σημείωση</u>: Θα ήταν διδακτικό να δούμε εποπτικά το σχήμα της γραφικής παράστασης της f και της f^{-1}