ΓΙΑ ΜΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΣΤΗΝ ΥΛΗ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Κώστα Βακαλόπουλου

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λάθος, αιτιολογώντας σύντομα τις απαντήσεις σας.

1. Αν $f(x)=x^{2009}$, $x\in\mathbb{R}$ τότε $f'(1)=2009$.

Σ Λ

2. Αν $f(x)=\frac{1}{x}$ και $f'(\alpha)=-\frac{1}{4}$ τότε ισχύει οπωσδήποτε $\alpha=2$.

Σ Λ

3. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο Α με $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in A$ τότε ισχύει: $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=-\frac{f'(x)}{f^2(x)}$.

Σ Λ

4. Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ τότε ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $\left(f(\eta\mu x)\right)'=f'(\eta\mu x)\cdot\eta\mu x$.

Σ Λ

5. Αν $h(x)=f(g(x))$, $x\in\mathbb{R}$ και $f'(2)=g'(2)=g(2)=2$ τότε ισχύει: $h'(2)=4$.

Σ Λ

Β) Να δώσετε σύντομες απαντήσεις στις παρακάτω ερωτήσεις:

1. Αν η μέση τιμή των τιμών μιας μεταβλητής Χ είναι $\bar{x}$ τότε ποια είναι η μέση τιμή των τιμών της μεταβλητής $Y=X-\bar{x}$ και την $W=X+\bar{x}$.

2. Σε ποια περίπτωση είμαστε βέβαιοι ότι η διάμεσος των παρατηρήσεων συμπίπτει με μια τιμή της μεταβλητής Χ;

3. Πόσο είναι το άθροισμα όλων των συχνοτήτων μιας μεταβλητής; Ομοίως πόσο το άθροισμα όλων των σχετικών συχνοτήτων;

4. Αν το πλήθος των τιμών μιας μεταβλητής συμπίπτει με το μέγεθος του δείγματος τότε τι συμπεραίνουμε για τις συχνότητες των τιμών αυτών;

5. Να δειχθεί ότι αν η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων t_i μιας μεταβλητής Χ, $i=1,\dots,\nu$ είναι μηδέν τότε είναι: $t_1=t_2=t_3=\dots=t_\nu=\bar{x}$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή τους.

Γ) **Έστω τα αριθμητικά δεδομένα: α,α, β,β,β,β, γ,γ,γ,γ,γ,γ, δ,δ,δ,δ,δ, ε,ε,ε με α<β<γ<δ<ε.**

Με βάση τα δεδομένα αυτά απαντήστε ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι λάθος αιτιολογώντας την απάντησή σας.

1. Η σχετική συχνότητα του β είναι 0,2.

2. Η αθροιστική συχνότητα του γ είναι 12.

3. Η σχετική αθροιστική συχνότητα του β είναι 0,3.

4. Η σχετική αθροιστική συχνότητα επί τοις εκατό του γ είναι 60.

5. Η σχετική συχνότητα επί τοις εκατό του δ είναι 60.

Δ) **Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και $A, B \subseteq \Omega$ ενδεχόμενα του δ.χ. Ω.**

Σημειώστε το (Σ) αν είναι σωστή ή το (Λ) αν είναι λάθος καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, αιτιολογώντας σύντομα τις απαντήσεις σας.

1. Αν $P(A)=\frac{2}{3}$ και $P(B)=\frac{1}{2}$ τότε τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα.

Σ Λ

2. Αν $P(A)=\frac{2}{3}$ και $P(B)=\frac{1}{2}$ τότε η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί η πιθανότητα της τομής: $A \cap B$ είναι $\frac{2}{3}$.

Σ Λ

3. Αν $P(A)=\frac{2}{3}$ και $P(B)=\frac{1}{2}$ τότε η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η πιθανότητα της ένωσης: $A \cup B$ είναι $\frac{2}{3}$.

Σ Λ

4. Ισχύει: $P(A \cap B) \le P(A \cup B)$.

Σ Λ

5. Η μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η πιθανότητα της ένωσης $A \cup B$ είναι ο αριθμός: $P(A)+P(B)$.

Σ Λ

6. Η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η πιθανότητα της τομής $A \cap B$ είναι ο αριθμός: $P(A)+P(B)-1$.

Σ Λ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Α) Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(x)=2009 \cdot x^{2008}$. Για $x=1$, $f'(1)=2009$ (Σ)

2. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$, $f'(x)=-\frac{1}{x^2}$. Για $x=\alpha$ ΑΡΑ: $-\frac{1}{4}=-\frac{1}{\alpha^2} \Leftrightarrow \alpha^2=4 \Leftrightarrow \alpha=2$ ή -2 : (Λ)

3. $\left(\frac{1}{f(x)}\right)'=\frac{1' \cdot f(x)-1 \cdot f'(x)}{f^2(x)}=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$: (Σ)

4. $\left[f(\eta\mu x)\right]'=f'(\eta\mu x)\cdot(\eta\mu x)'=$
$=f'(\eta\mu x)\cdot \sigma\upsilon\nu x$: (Λ)

5. $h'(x)=\left[f(g(x))\right]'=f'(g(x))\cdot g'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για $x=2$, $h'(2)=f'(g(2))\cdot g'(2)=f'(2)\cdot 2=4$: (Σ)

Β)

1. $\bar{y}=\bar{x}-\bar{x}=0$, $\bar{w}=\bar{x}+\bar{x}=2\bar{x}$

2. Όταν το πλήθος των παρατηρήσεων είναι περιττό.

3. $\left(\sum_{i=1}^{\kappa}\nu_i=\nu\right)$ Το άθροισμα συχνοτήτων ισούται με το μέγεθος ν του δείγματος, $\left(\sum_{i=1}^{\kappa}f_i=1\right)$ Το άθροισμα των σχετικών συχνοτήτων ισούται με 1.

4. Οι συχνότητες των τιμών είναι όλες ίσες με 1.

5. $s^2=0 \Leftrightarrow \frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}(t_i-\bar{x})^2=0 \Leftrightarrow$
$(t_1-\bar{x})^2+(t_2-\bar{x})^2 \ldots +(t_\nu-\bar{x})^2=0 \Leftrightarrow$
$t_1-\bar{x}=0$ και $t_2-\bar{x}=0$ …και $t_\nu-\bar{x}=0$
$\Leftrightarrow t_1=t_2=\ldots=t_\nu=\bar{x}$

Γ)

x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
α	2	0,10	10	2	0,10	10
β	4	0,20	20	6	0,30	30
γ	6	0,30	30	12	0,60	60
δ	5	0,25	25	17	0,85	85
ε	3	0,15	15	20	1,00	100
	20	1,00	100			

Σύμφωνα με τον πίνακα συχνοτήτων και σχετικών συχνοτήτων έχουμε:

1. $f_2 = 0,2$ (Σωστή)
2. $N_3 = 12$ (Σωστή)
3. $F_2 = 0,30$ (Σωστή)
4. $F_3\% = 60$ (Σωστή)
5. $f_4\% = 25$ (Λάθος)

Δ)

1. Αν τα Α, Β ήταν ασυμβίβαστα θα ίσχυε:

$P(A\cap B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{7}{6} > 1$ άτοπο!

Άρα τα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα. (Λ)

2. Ισχύει:

$A\cap B \subseteq A \Rightarrow P(A\cap B) \le P(A) = \frac{2}{3}$ και

$A\cap B \subseteq B \Rightarrow P(A\cap B) \le P(B) = \frac{1}{2}$

Άρα: $P(A\cap B) \le \min\{P(A), P(B)\} = $

$= \min\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}$ (Λ)

3. Ισχύει: $A \subseteq A\cup B \Rightarrow P(A) \le P(A\cup B) \Rightarrow$

$P(A\cup B) \ge P(A) = \frac{2}{3}$ και

$B \subseteq A\cup B \Rightarrow P(B) \le P(A\cup B) \Rightarrow$

$P(A\cup B) \ge P(B) = \frac{1}{2}$.

Άρα: $P(A\cup B) \ge \max\{P(A), P(B)\} = \frac{2}{3}$ (Σ)

4. Ισχύει:

$A\cap B \subseteq A\cup B \Rightarrow P(A\cap B) \le P(A\cup B)$ (Σ)

5. $P(A\cup B) \le \min\{1,\ P(A) + P(B)\}$ (Λ)

6. $P(A\cap B) \le 1 \Rightarrow$

$P(A) + P(B) - P(A\cap B) \le 1 \Rightarrow$

$P(A) + P(B) - 1 \le P(A\cap B) \Rightarrow$

$P(A\cap B) \ge P(A) + P(B) - 1$

Όμως: $P(A\cap B) \ge 0$ άρα

$P(A\cap B) \ge \max\{0,\ P(A) + P(B) - 1\}$ (Λ)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΑΝΑΠΤΥΞΗΣ

1. Να υπολογιστεί ο αριθμός α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \frac{\alpha}{x^2+1}$ στο σημείο $A(3, f(3))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία $y = -\frac{3}{25}x + 2009$. Ποια είναι η εξίσωση της ευθείας αυτής.

Λύση

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$f'(x) = \alpha\cdot\frac{-(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} = -\frac{2\alpha x}{(x^2+1)^2}$.

Για $x=3$, $f'(3) = \frac{-2\alpha\cdot 3}{(3^2+1)^2} = \frac{-6\alpha}{100} = \frac{-3\alpha}{50}$

Πρέπει: $\frac{-3\alpha}{50} = -\frac{3}{25} \Leftrightarrow -3\alpha = -6 \Leftrightarrow \alpha = 2$.

Για $\alpha = 2$, $f(x) = \frac{2}{x^2+1}$ και $f(3) = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$

Οπότε: η εξίσωση της εφαπτομένης της μορφής: $y = -\frac{3}{25}\cdot x + \beta$.

Η ευθεία όμως αυτή διέρχεται από το σημείο $A\left(3, \frac{1}{5}\right)$, οπότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωσή της, άρα:

$\frac{1}{5} = -\frac{3}{25}\cdot 3 + \beta \Leftrightarrow \beta = \frac{1}{5} + \frac{9}{25} \Leftrightarrow \beta = \frac{14}{25}$

Άρα η ευθεία έχει εξίσωση:

$y = -\frac{3}{25}x + \frac{14}{25}$

2. Σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε τα σημεία: $A(x, 2-x)$, $B(3x, 2-x)$, $\Gamma(3x, 6-3x)$ και $\Delta(x, 6-3x)$ με $x > 0$ και $x \ne 2$.

Να εκφράσετε το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ που σχηματίζεται, ως συνάρτηση

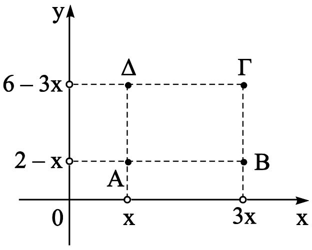
του x και να προσδιορίσετε την τιμή του x για την οποία το εμβαδό γίνεται μέγιστο.

Λύση

Το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ δίνεται από τη συνάρτηση:

$E(x)=(3x-x)\left[(6-3x)-(2-x)\right]\Rightarrow$

$E(x)=2x\cdot(4-2x)=-4x^2+8x$, $x>0$



Για $x>0$, $E'(x)=-8x+8$

$E'(x)=0\Leftrightarrow -8x+8=0\Leftrightarrow x=1$

$E'(x)>0\Leftrightarrow -8x+8>0\Leftrightarrow x<1$

$E'(x)<0\Leftrightarrow -8x+8<0\Leftrightarrow x>1$

Άρα: Η συνάρτηση (εμβαδόν) παίρνει τη μέγιστη τιμή της για $x=1$. (Το μέγιστο εμβαδόν είναι: $E(1)=4$τ.μ.).

3. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\dfrac{4\sqrt{x+2}-8}{x^2-4}$. Αν A, B είναι δύο ενδεχόμενα του δειγματικού χώρου Ω ενός πειράματος τύχης με $P(A\cup B)=0,6$, $P(A)=\lim\limits_{x\to 2}f(x)$

α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

β) Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου να πραγματοποιηθεί μόνο το ενδεχόμενο B.

γ) Να δειχθεί ότι $P(B)\geq\dfrac{7}{20}$.

Λύση

α) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το σύνολο $A=(-2,\ 2)\cup(2,\ +\infty)$

α) Για κάθε $x\neq 2$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4\sqrt{x+2}-8}{x^2-4}=$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}(x+2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}=\frac{1}{4}$$

Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου B–A.

Όμως: $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)$ (1)

και $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$ (2)

Άρα: $P(B-A)=P(B)-P(A\cap B)=$

$=P(A\cup B)-P(A)=0,6-\dfrac{1}{4}=\dfrac{7}{20}$

β) [$A-B\subseteq B\Rightarrow P(A-B)\leq P(B)$

Οπότε: $P(B)\geq\dfrac{7}{20}$]

4. Σ' ένα ακριτικό νησί από τους καθηγητές που υπηρετούσαν πέρυσι στο Γυμνάσιο και το Λύκειο ν_1 απ' αυτούς είχαν 1 χρόνο προϋπηρεσία, ν_2 2 χρόνια, ν_3 3 χρόνια, ν_4 4 χρόνια και ν_5 5 χρόνια. Στη συνέχεια ήρθαν 5 ακόμα καθηγητές επιπλέον, ένας σε κάθε μία από τις προηγούμενες κατηγορίες.

Αν αρχικά η μέση τιμή των χρόνων προϋπηρεσίας των καθηγητών ήταν 3 χρόνια, να δείξετε ότι στη συνέχεια η μέση τιμή δεν άλλαξε.

Λύση

Την προηγούμενη χρονιά η μέση τιμή ήταν

$\bar{x}=3\Leftrightarrow\dfrac{1\nu_1+2\nu_2+3\nu_3+4\nu_4+5\nu_5}{\nu_1+\nu_2+\nu_3+\nu_4+\nu_5}=3\Leftrightarrow$

$1\nu_1+2\nu_2+\ldots+5\nu_5=3\cdot\nu$ $\left(\nu=\sum\limits_{i=1}^{5}\nu_i\right)$

Την φετινή χρονιά η μέση τιμή είναι:

$$\bar{y}=\frac{1(\nu_1+1)+2(\nu_2+1)+\ldots+5(\nu_5+1)}{(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_5)+5}\Rightarrow$$

$$\bar{y}=\frac{(\nu_1+2\nu_2+\ldots+5\nu_5)+(1+2+3+4+5)}{(\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_5)+5}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\bar{y}=\frac{3\nu+15}{\nu+5}=\frac{3(\nu+5)}{\nu+5}=3$$

5. Έστω $t_1, t_2, \dots, t_\nu$ οι παρατηρήσεις (τιμές) μιας μεταβλητής X σε δείγμα μεγέθους ν που ακολουθούν την κανονική κατανομή και η συνάρτηση f με $f(x) = (t_1 + t_2 + \dots + t_\nu)\cdot x^2 - \nu \cdot x + 2009$

Αν η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων της μεταβλητής X είναι 0,6 και η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο $\frac{1}{8}$,

α) Να βρείτε την μέση τιμή και να δείξετε ότι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή c που πρέπει να αυξηθούν όλες οι παρατηρήσεις, ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

γ) Αν 10 παρατηρήσεις είναι μεγαλύτερες από 5,2 να βρείτε το μέγεθος του δείγματος.

Λύση

α) $f'(x) = 2\cdot(t_1 + t_2 + \dots + t_\nu)x - \nu \quad , \quad x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\nu}{2(t_1 + t_2 + \dots + t_\nu)}$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{\nu}{2(t_1 + \dots + t_\nu)} \text{ και}$$

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < \frac{\nu}{2(t_1 + \dots + t_\nu)}$$

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο $\frac{\nu}{2(t_1 + \dots + t_\nu)}$

Επομένως: $\frac{\nu}{2(t_1 + \dots + t_\nu)} = \frac{1}{8} \Leftrightarrow$

$t_1 + \dots + t_\nu = 4\nu$. Έτσι για τη μέση τιμή έχουμε:

$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{\nu} t_i}{\nu} = \frac{t_1 + \dots + t_\nu}{\nu} = \frac{4\nu}{\nu} = 4$. Ο συντελεστής μεταβολής είναι:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{0,6}{4} = 0,15 = 15\%$$

Άρα: Το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

β) Έστω c η ζητούμενη τιμή και $y_i = t_i + c$, $i = 1, 2, \dots, \nu$ οι νέες τιμές της μεταβλητής X. Ως γνωστόν $\bar{y} = \bar{x} + c = 4 + c$ ενώ η τυπική απόκλιση δεν μεταβάλλεται. Αν CV_y ο νέος συντελεστής μεταβολής θα έχουμε $CV_y = \frac{0,6}{4+c}$. Πρέπει:

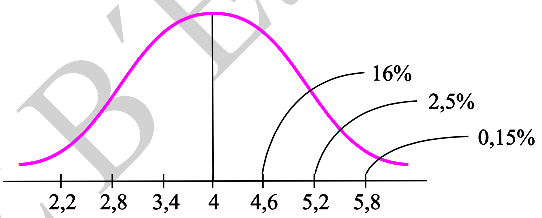
$$\frac{0,6}{4+c} \le 10\% \Leftrightarrow 0,6 \le 0,1\cdot(4+c) \Leftrightarrow$$

$6 \le 4 + c \Leftrightarrow c \ge 2$. Άρα για να γίνει το δείγμα ομοιογενές, πρέπει οι τιμές να αυξηθούν τουλάχιστον κατά 2 μονάδες.

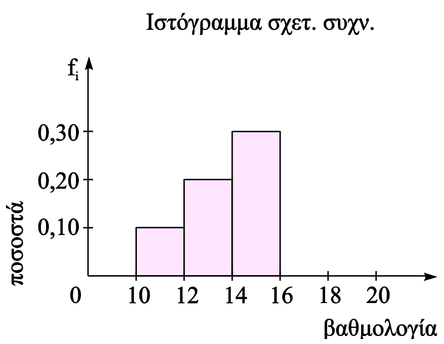
γ) Επειδή η κατανομή είναι κανονική έχουμε:

$2,5\% \cdot \nu = 10 \Leftrightarrow 0,025 \cdot \nu = 10 \Leftrightarrow$

$\frac{10}{0,025} = 400$



6. Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων (f_i) της βαθμολογίας των μαθητών της εκπαιδευτικής περιφέρειας της επαρχίας Κυνουρίας του νομού Αρκαδίας. Από το ιστόγραμμα λείπουν: οι ιστοί (ορθογώνια) της 4ης και 5ης κλάσης.



Αν γνωρίζουμε ότι η μέση βαθμολογία των μαθητών είναι 15,2 τότε:

α) Να βρείτε τις συχνότητες που λείπουν και να συμπληρώσετε το ιστόγραμμα.

β) Ο σύλλογος των Κυνουραίων της Αμερικής προτίθεται να βραβεύσει με χρηματικό έπαθλο όσους έχουν βαθμολογία πάνω από 17. Τι ποσοστό μαθητών αντιστοιχεί στους μαθητές που θα βραβευτούν;

γ) Αν οι μαθητές με βαθμολογία από 15 έως 17 είναι 150 πόσοι μαθητές θα βραβευτούν;

Λύση

α) Έστω κ, λ οι σχετικές συχνότητες που λείπουν.

Προφανώς: $0,10+0,20+0,30+\kappa+\lambda=1 \Leftrightarrow \kappa+\lambda=0,4$

Επίσης: $\bar{x}=\sum_{i=1}^{5}x_i f_i \Leftrightarrow 15,2=0,10\cdot 11+$
$+0,20\cdot 13+0,30\cdot 15+\kappa\cdot 17+\lambda\cdot 19 \Leftrightarrow$
$15,2=1,1+2,6+4,5+17\kappa+19\lambda \Leftrightarrow$
$17\kappa+19\lambda=7$

Επιλύουμε το σύστημα:

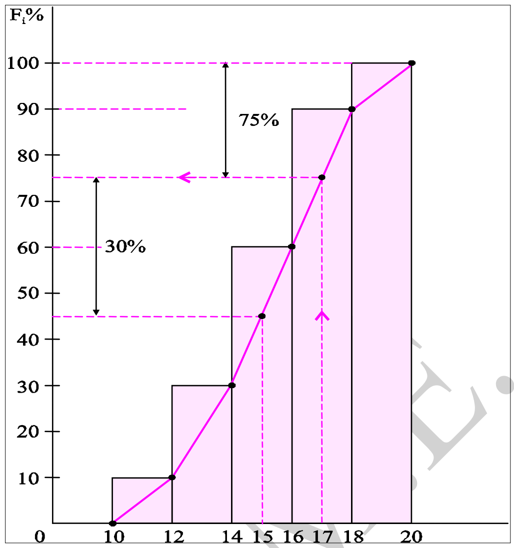
$$\begin{cases}\kappa+\lambda=0,4\\ 17\kappa+19\lambda=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}17\kappa+19\lambda=6,8\\ 17\kappa+19\lambda=7\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}2\lambda=0,2\\ \kappa+\lambda=0,4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\lambda=0,1\\ \kappa=0,3\end{cases}$$

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα σχετικών συχνοτήτων:

Κλάσεις	x_i	f_i	$f_i\%$	$F_i\%$
10-12	11	0,10	10	10
12-14	13	0,20	20	30
14-16	15	0,30	30	60
16-18	17	0,30	30	90
18-20	19	0,10	10	100
		1	100	

β) Στη συνέχεια σχεδιάζουμε το ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό και το αντίστοιχο πολύγωνο αθροιστικών συχνοτήτων επί τοις εκατό απ' όπου παρατηρούμε:



Πάνω από 17 είναι το 25% των μαθητών ((100-75)%)

γ) Με βαθμολογία από 15 έως 17 είναι το 30% των μαθητών ((75-45)%)

Επειδή το 30% των μαθητών είναι 150 θα έχουμε συνολικά 150:30% = 500 μαθητές. Οπότε θα βραβευτούν το 25% των 500 μαθητών δηλαδή 125 μαθητές.

7. Έστω πείραμα τύχης με δειγματικό χώρο $\Omega=\{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\}$, $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon\in\mathbb{R}$. Αν P(α), P(β), P(γ), P(δ) και P(ε) οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω και:

- $P(\alpha)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}{2x}$,
- **P(β) ισούται με τον συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που είναι κάθετη στην εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της $f(x)=-3x^2$ στο Α(1, f(1)) ,**
- **P(γ) ίση με τον συντελεστή μεταβολής των μισθών των υπαλλήλων μιας εταιρείας που ακολουθούν κανονική κατανομή και το 50% είναι πάνω από 1000€ ενώ το 2,5% πάνω από 1200€ ,**

- **P(δ) το μέγιστο της συνάρτησης $g(x)=συν^2x-\frac{2}{3}$ στο $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$**

A) Να βρεθούν οι πιθανότητες των α, β, γ, δ και ε.

B) Αν $A=\{α,β,γ\}$ και $B=\{γ,δ,ε\}$ να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

i) Γ: Να συμβαίνει μόνο το A

ii) Δ: Να συμβαίνει μόνο ένα εκ των A,B

iii) E: Να μην συμβαίνουν τα A και B συγχρόνως

iv) Z: Να μην συμβαίνει κανένα από τα A,B

Λύση

A)

- $P(α)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+2x}-\sqrt{1+x}}{2x}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+2x}\right)^{2}-\left(\sqrt{1+x}\right)^{2}}{2x\cdot\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{1}+2x-\cancel{1}-x}{2x\cdot\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}}{2\cancel{x}\cdot\left(\sqrt{1+2x}+\sqrt{1+x}\right)}=\frac{1}{4}$$

Έχουμε:

- $f'(x)=-6x$.Για $x=1, f'(1)=-6$.

Αν λ ο συντελεστής διεύθυνσης της ζητούμενης ευθείας τότε: $λ\cdot(-6)=-1\Leftrightarrow λ=\frac{1}{6}$.

Άρα: $P(β)=\frac{1}{6}$

- Αν $\bar{x}$ και δ η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση των μισθών των υπαλλήλων της εταιρείας που ακολουθούν κανονική κατανομή θα ισχύει:

$\bar{x}=1000$ και $\bar{x}+2s=1200$

Άρα: $s=100$. Οπότε: $CV=\frac{100}{1000}=10\%$

Άρα: $P(γ)=\frac{1}{10}$

- Για κάθε $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$

$g'(x)=2συνx\cdot(-ημx)=-ημ2x$

$g'(x)=0\Leftrightarrow -ημ2x=0\Leftrightarrow x=0$,

$g'(x)<0\Leftrightarrow ημ2x>0\Leftrightarrow 0<x<\frac{\pi}{2}$,

$g'(x)>0\Leftrightarrow ημ2x<0\Leftrightarrow -\frac{\pi}{2}<x<0$

x	$-\frac{\pi}{2}$ 0	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	+	−
$g(x)$	↗	↘

Άρα, στο 0 η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο το $f(0)=συν^2 0-\frac{2}{3}=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

Άρα: $P(δ)=\frac{1}{3}$

Όμως:

$P(α)+P(β)+P(γ)+P(δ)+P(ε)=1\Leftrightarrow$

$P(ε)=1-\left(P(α)+P(β)+P(γ)+P(δ)\right)\Leftrightarrow$

$P(ε)=1-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{3}\right)=$

$=1-\frac{15+10+6+20}{20}=\frac{9}{60}=\frac{3}{20}$

β) i) $Γ=A-B=\{α,β\}$,

$P(Γ)=P(α)+P(β)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{3+2}{12}=\frac{5}{12}$

ii) $Δ=(A-B)\cup(B-A)=$

$=\{α,β\}\cup\{δ,ε\}=\{α,β,γ,δ,ε\}$,

$P(Δ)=1-P(γ)=1-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}$

iii) $E=(A\cap B)'=\{α,β,γ,δ,ε\}=Δ$.

ΑΡΑ: $P(E)=\frac{9}{10}$.

iv) $Z=(A\cup B)'=\varnothing$. Οπότε: $P(Z)=0$.