ΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ, Η ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ, ΟΙ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΚΑΙ Η ΣΟΦΙΑ !

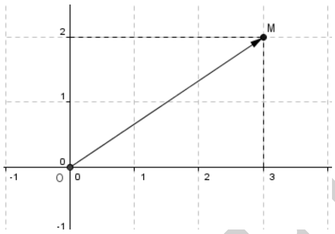
Του Κώστα Βακαλόπουλου

- *Κύριε, πόσο μας χρειάζονται αυτά που μάθαμε πέρσι στα μαθηματικά της κατεύθυνσης;*

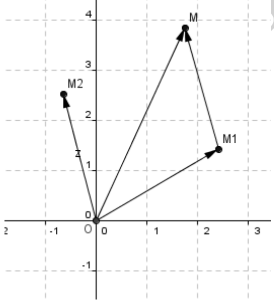
- Σοφία, αν όχι όλα, αρκετά από αυτά.

- *Για πείτε μου ένα παράδειγμα!*

- Βεβαίως! Ο **μιγαδικός αριθμός** $z=\alpha+\beta i$ με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, παρίσταται στο μιγαδικό επίπεδο με το σημείο $M(\alpha,\beta)$. Το δε διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ (είδες τι είπα: διάνυσμα!), όπου O η αρχή των αξόνων λέγεται **διανυσματική ακτίνα** του μιγαδικού z. Επίσης από τις πιο χρήσιμες έννοιες στους μιγαδικούς αριθμούς είναι το **μέτρο** του z που το συμβολίζουμε με $|z|$ και ισούται με το **μέτρο της διανυσματικής του ακτίνας**, δηλαδή ισχύει: $|z|=|\overrightarrow{OM}|$. Δες στο σχηματάκι την διανυσματική ακτίνα του μιγαδικού αριθμού: $z=3+2i$, είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}=(3,2)$.



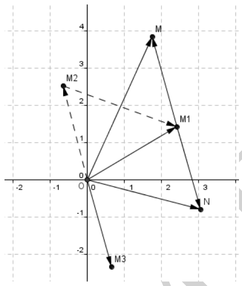
Επίσης **το άθροισμα z_1+z_2 δύο μιγαδικών αριθμών z_1 και z_2 έχει διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων $\overrightarrow{OM_1}$ και $\overrightarrow{OM_2}$ των δύο μιγαδικών.**



Δηλαδή $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}$.

Επειδή όμως $|\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{M_1M}|\le|\overrightarrow{OM_1}|+|\overrightarrow{M_1M}|$ και στους μιγαδικούς ισχύει ότι:

$|z_1+z_2|\le|z_1|+|z_2|$.



Το ίδιο συμβαίνει και με **τη διαφορά τους: z_1-z_2 που έχει διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{M_2M_1}$ που ισούται με τη διαφορά των διανυσματικών ακτίνων των δύο μιγαδικών.** Πράγματι:

$$\overrightarrow{OM_1}-\overrightarrow{OM_2}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_3}=\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{M_2M_1}.$$

- *Δάσκαλε, αρχίζει και μου φαίνεται ότι δεν πήγε τσάμπα η χρονιά πέρσι!*

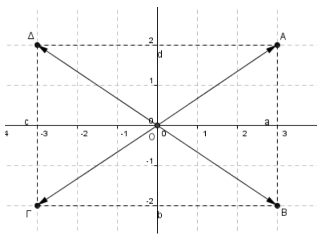
- Και ακόμα δεν σου έχω πει σχεδόν τίποτε. Κατ' αρχήν θα σου κάνω μερικές ερωτήσεις για να δω αν κατάλαβες αυτά που είπαμε μέχρι τώρα: «Τι είναι οι διανυσματικές ακτίνες των πραγματικών και τι των φανταστικών αριθμών;»

- *Των μεν πραγματικών είναι διανύσματα συγγραμμικά με τον άξονα x΄x, των δε φανταστικών διανύσματα συγγραμμικά με τον άξονα y΄y.*

- Μπράβο! Για σκέψου τώρα, τι σχέση έχουν οι διανυσματικές ακτίνες των συζυγών μιγαδικών αριθμών και τι των αντίθετων μιγαδικών;

- *Λοιπόν, των συζυγών είναι διανύσματα συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x και των αντίθετων είναι αντίθετα διανύσματα. Και νομίζω ότι τα σημεία στα οποία παρίστανται οι μιγαδικοί: $z,\bar{z},-z$ και $-\bar{z}$ σχηματίζουν τετράγωνο!*

- Όχι , Σοφία! Τα πρώτα που είπες είναι σωστά, όμως το τετράπλευρο που σχηματίζεται είναι **ορθογώνιο**! Δες για παράδειγμα στο σχήμα με



τον μιγαδικό $z = 3+2i$ το τετράπλευρο ΑΒΓΔ που έχει κορυφές τις εικόνες των μιγαδικών $z, \bar{z}, -z$ και $-\bar{z}$ αντίστοιχα. Πρόσεχε λοιπόν! Θα σου δώσω τώρα μια άσκηση που θα διαπιστώσεις πλέον ότι οι γνώσεις των διανυσμάτων είναι απαραίτητες στους μιγαδικούς αριθμούς.

ΑΣΚΗΣΗ:

Δίνονται οι μιγαδικοί $z = \alpha + \beta i$ και $w = \gamma + \delta i$ με $w \neq 0$. Αν $\overrightarrow{OA}$ και $\overrightarrow{OB}$ οι διανυσματικές ακτίνες των z και w αντίστοιχα,

α) Δείξτε ότι: $\dfrac{z}{w} = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2} - \dfrac{\det\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)}{|\overrightarrow{OB}|^2} i$

β) Αν το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισόπλευρο και $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z}{w}\right) > 0$ να βρεθεί ο μιγαδικός αριθμός $\dfrac{z}{w}$.

Λοιπόν, έχουμε: $\dfrac{z}{w} = \dfrac{\alpha+\beta i}{\gamma+\delta i} = \ldots = \dfrac{\alpha\gamma+\beta\delta}{\gamma^2+\delta^2} + \dfrac{-\alpha\delta+\beta\gamma}{\gamma^2+\delta^2} i$ (1)

Ας θυμηθούμε επίσης ότι: $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \alpha\gamma + \beta\delta$, $|\overrightarrow{OB}| = \sqrt{\gamma^2+\delta^2}$, $\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \alpha\delta - \beta\gamma$. Οπότε:

α) Η (1) γίνεται: $\dfrac{z}{w} = \dfrac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|^2} - \dfrac{\det\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)}{|\overrightarrow{OB}|^2} i$

β) Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισόπλευρο οπότε:

$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = 60^\circ$ και $(AB\Gamma) = \dfrac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$ με $\alpha = |\overrightarrow{OB}|$.

Άρα: $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = |\overrightarrow{OB}|^2 \cdot \text{συν}60^\circ = \boxed{\dfrac{|\overrightarrow{OB}|^2}{2}}$ και

$\dfrac{1}{2}\left|\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)\right| = \dfrac{|\overrightarrow{OB}|^2\sqrt{3}}{4}$.

Όμως $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z}{w}\right) > 0 \Rightarrow \det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) < 0$,

οπότε: $\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \boxed{-\dfrac{|\overrightarrow{OB}|^2\sqrt{3}}{2}}$.

Έτσι ο μιγαδικός $\dfrac{z}{w}$ γίνεται:

$$\frac{z}{w} = \frac{\frac{|\overrightarrow{OB}|^2}{2}}{|\overrightarrow{OB}|^2} - \frac{-\frac{|\overrightarrow{OB}|^2\sqrt{3}}{2}}{|\overrightarrow{OB}|^2} i = \boxed{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i}$$

- *Απίστευτη άσκηση κύριε!*

- Ας δώσουμε τώρα μερικές χρήσιμες πληροφορίες που αφορούν το μέτρο των μιγαδικών αριθμών και πως σχετίζεται με την **αναλυτική γεωμετρία**.

Όπως είδαμε προηγουμένως η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς $z_1 - z_2$ δυο μιγαδικών αριθμών που παρίστανται στα σημεία M_1 και M_2 είναι το διάνυσμα $\overrightarrow{ON}$ που ισούται με το διάνυσμα $\overrightarrow{M_2M_1}$ που έχει αρχή και πέρας τις εικόνες των z_2 και z_1 αντίστοιχα. Άρα **το μέτρο της διαφοράς δυο μιγαδικών αριθμών ισούται με την απόσταση των εικόνων τους!**

Δηλαδή $|z_1 - z_2| = |\overrightarrow{M_2M_1}| = (M_1M_2)$.

Αν συνειδητοποιήσεις καλά αυτό, θα καταλάβεις αμέσως όλες τις προτάσεις που θα σου γράψω τώρα:

Έστω z_0, z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί με εικόνες, στο μιγαδικό επίπεδο, τα σημεία K, M_1, M_2 αντίστοιχα. Αν ισχύει:

1. $\boxed{|z - z_0| = \rho}$, $\rho > 0$ τότε τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται σε **κύκλο** κέντρου K και ακτίνας ρ.
2. $\boxed{|z - z_0| > \rho}$, $\rho > 0$, τότε τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται στο **εξωτερικό του ιδίου κύκλου.**
3. $\boxed{|z - z_0| < \rho}$, $\rho > 0$, τότε τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται το **εσωτερικό του ιδίου κύκλου.**
4. $\boxed{|z - z_1| = |z - z_2|}$, τότε τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται **στη μεσοκάθετο** του τμήματος M_1M_2.
5. $\boxed{|z - z_1| > |z - z_2|}$ ή $\boxed{|z - z_1| < |z - z_2|}$, τότε τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται στο **ημιεπίπεδο** που ορίζεται από τη μεσοκάθετο του M_1M_2 και το M_2 ή M_1 αντίστοιχα.
6. $\boxed{|z - z_1| + |z - z_2| = 2\alpha}$, $0 < M_1M_2 < 2\alpha$, τότε τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται σε **έλλειψη** με εστίες M_1 και M_2.

- Θέλεις να μου πεις τι ονομάζεται έλλειψη με εστίες τα σημεία M_1 και M_2 ;

- *Βεβαίως, θυμάμαι καλά!* ***Έλλειψη με εστίες τα σημεία M_1 και M_2 ονομάζεται ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν άθροισμα αποστάσεων από τα M_1 και M_2 σταθερό και μεγαλύτερο από την απόσταση (M_1M_2).*** *Επομένως αυτό που ισχυριστήκατε στη 6η περίπτωση είναι προφανές.*

- Συνεχίζω λοιπόν!

7. $\boxed{\left||z-z_1|-|z-z_2|\right|=2\alpha}$**,** $0<2\alpha<M_1M_2$, τότε τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται σε **υπερβολή** με εστίες M_1 και M_2.

8. $\boxed{|z-z_1|=\lambda|z-z_2|}$, $0<\lambda\neq 1$**,** τότε τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται σε **κύκλο** (Απολλώνιος κύκλος).

9. $\boxed{|z-z_1|^2+|z-z_2|^2=\lambda}$, με $\lambda>\dfrac{(M_1M_2)^2}{2}$, τότε τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται σε **κύκλο.** Ειδικά αν $\lambda=(M_1M_2)^2$ ο κύκλος έχει διάμετρο το ευθύγραμμο τμήμα M_1M_2.

10. $\boxed{|z-z_1|^2-|z-z_2|^2=\lambda}$, $\lambda\in\mathbb{R}^*$, τότε τα σημεία $M(z)$ βρίσκονται σε **ευθεία.**

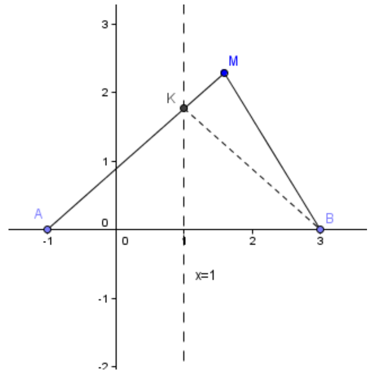
- *Σιγά – σιγά, γιατί μου είπατε τόσα πράγματα απότομα. Εκείνο ειδικά με τον Απολλώνιο κύκλο, τι το θέλατε;*

- Μην ανησυχείς θα σου τα εξηγήσω όλα. Όπως ισχυρίστηκες και συ προηγουμένως, μέχρι και την 7^{η} περίπτωση είναι απλά τα πράγματα αρκεί να έχουμε γεωμετρική εποπτεία μερικών εννοιών και να ξέρουμε καλά τους ορισμούς των κωνικών τομών. Για παράδειγμα, τι λέει η 5^{η} περίπτωση; Λέει ότι οι μιγαδικοί z έχουν εικόνες όλα τα σημεία ενός ημιεπιπέδου. Ας δούμε το παρακάτω παράδειγμα:

Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z που ικανοποιούν την σχέση: $|z+1|>|z-3|$ (1)

Προφανώς αναζητούμε τα σημεία Μ που είναι εικόνες των μιγαδικών z που ικανοποιούν την (1) δηλαδή των σημείων που απέχουν περισσότερο από το σημείο $A(-1,0)$ (εικόνα του μιγαδικού: -1), απ' ότι από το σημείο $B(3,0)$ (εικόνα του μιγαδικού: 3). Τα σημεία αυτά είναι όσα βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από την ευθεία $x=1$ (μεσοκάθετο του ΑΒ) και το σημείο Β, μη συμπεριλαμβανομένων των σημείων της ευθείας.

Πράγματι αν Μ σημείο στο παραπάνω ημιεπίπεδο (βλέπε σχήμα), ισχύει: $MA=MK+KA=MK+KB>MB$.
Η τελευταία σχέση εκφράζει την ανισοτική σχέση στο τρίγωνο ΜΚΒ.



- *Κύριε, δώστε μου και μια άσκηση που να καταλήγει σε έλλειψη.*

- Αμέσως, γράψε μία:

ΑΣΚΗΣΗ

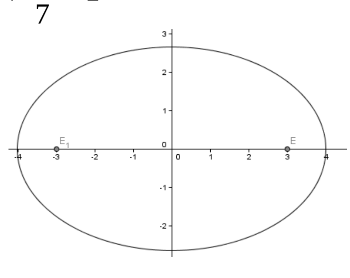
Να βρεθεί που κινούνται οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z που ικανοποιούν την σχέση: $\dfrac{1}{|z-3|}+\dfrac{1}{|z+3|}=\dfrac{8}{|z+3|\cdot|z-3|}$ (1).

$$\frac{1}{|z-3|}+\frac{1}{|z+3|}=\frac{8}{|z-3|\cdot|z+3|}\Leftrightarrow$$

$$|z-3|\cdot|z+3|\cdot\frac{1}{|z-3|}+|z-3|\cdot|z+3|\cdot\frac{1}{|z+3|}=|z-3|\cdot|z+3|\cdot\frac{8}{|z-3|\cdot|z+3|}\Leftrightarrow$$

$$\boxed{|z+3|+|z-3|=8}$$

Σύμφωνα με όσα είπες στον ορισμό της έλλειψης προηγουμένως Σοφία, οι εικόνες των μιγαδικών z κινούνται στην έλλειψη με εστίες τα σημεία $E'(-3,0)$ και $E(3,0)$ αφού η παραπάνω σχέση αυτό ακριβώς εκφράζει. Η εστιακή απόσταση είναι $2\gamma=6$ και ο μεγάλος άξονας $2\alpha=8$, δηλαδή $\alpha=4,\gamma=3$ οπότε $\beta=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$. Η εξίσωση, αν θυμάσαι είναι: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{7}=1$



- *Βεβαίως και θυμάμαι, κύριε! Μάλιστα μπορεί να γραφτεί και:* $7x^2+16y^2=112$. *Όμως θα ήθελα και μια άσκηση με υπερβολή.*

- Έχω μπροστά μου μία! Γράψε αμέσως:

ΑΣΚΗΣΗ

Αν $z = x + yi$ και ο $w = \dfrac{i}{z^2 + 1}$ είναι πραγματικός αριθμός, τότε το σύνολο των σημείων $M(x, y)$ είναι η υπερβολή $y^2 - x^2 = 1$ χωρίς τις κορυφές της.

Όμως στην άσκηση αυτή δεν έχουμε σχέση με μέτρα μιγαδικών που μας οδηγούν στις γεωμετρικές ιδιότητες του σημείου που παρίστανται. Γι αυτό θα την λύσουμε αλγεβρικά. Είναι ευκαιρία να δεις και αυτή την μεθοδολογία: *Θα αντικαταστήσουμε στην έκφραση του w το $z = x + yi$ και θα χρησιμοποιήσουμε την συνθήκη που προκύπτει από το ότι αυτός είναι πραγματικός. Έτσι θα οδηγηθούμε σε μια εξίσωση με δύο αγνώστους x , y οπότε θα δούμε ποια γραμμή εκφράζει, από τις γραμμές που μάθαμε πέρσι.* Προφανώς στην άσκηση αυτή η γραμμή θα είναι μια υπερβολή. Για να δούμε όμως.

$$w = \frac{i}{(x+yi)^2 + 1} = \frac{i}{x^2 - y^2 + 2xyi + 1} =$$

$$= \frac{i \cdot \left[\left(x^2 - y^2 + 1\right) - 2xyi\right]}{\left[\left(x^2 - y^2 + 1\right) + 2xyi\right] \cdot \left[\left(x^2 - y^2 + 1\right) - 2xyi\right]} =$$

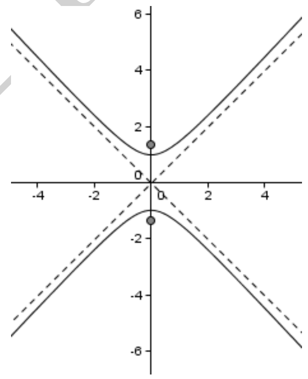
$$= \frac{2xy + \left(x^2 - y^2 + 1\right)i}{\left(x^2 - y^2 + 1\right)^2 + 4x^2y^2} =.$$

$$= \frac{2xy}{\left(x^2 - y^2 + 1\right)^2 + 4x^2y^2} + \frac{x^2 - y^2 + 1}{\left(x^2 - y^2 + 1\right)^2 + 4x^2y^2} i$$

Έτσι ο μιγαδικός w είναι πραγματικός αν και μόνο αν

$$\mathrm{Im}(w) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - y^2 + 1}{\left(x^2 - y^2 + 1\right)^2 + 4x^2y^2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^2 - x^2 = 1 \text{ και } \left(x^2 - y^2 + 1\right)^2 + 4x^2y^2 \neq 0.$$



Η $1^η$ σχέση μας οδηγεί σε υπερβολή και μάλιστα ισοσκελή, με ασύμπτωτες τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$ και εστίες τα σημεία $E'\left(0, -\sqrt{2}\right)$ και $E\left(0, \sqrt{2}\right)$ στον άξονα y΄y ενώ η $2^η$ μας απορρίπτει τα σημεία της $A(0,1)$ και $A'(0,-1)$ που είναι και οι κορυφές της. Υπ' όψιν ότι λόγω των ισοδυναμιών κάθε σημείο της υπερβολής εκτός των κορυφών της ικανοποιεί τις αρχικές συνθήκες.

- *Κύριε, έχω εκπλαγεί με τα όσα ακούω και βλέπω. Λέτε να υπάρχει άσκηση που μας οδηγεί σε παραβολή;*

- Κοίταξε, παραβολή δεν είναι εύκολο να προκύψει από σχέση με τα μέτρα μιγαδικών διότι παραβολή τι είναι;

- *Ξέρω: Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από ένα σημείο (εστία) και μια ευθεία (διευθετούσα).*

- Οπότε καταλαβαίνεις τώρα. Απόσταση σημείων ξέρουμε στους μιγαδικούς με το μέτρο της διαφοράς τους. Απόσταση όμως σημείου από ευθεία δεν γίνεται. Όμως νομίζω ότι έχω μια άσκηση που θα προκύψει παραβολή και αυτή όμως αλγεβρικά.

ΑΣΚΗΣΗ

α) Έστω $z \in \mathbb{C}$ ώστε: $\left|\mathrm{Re}(z) + 3\right| = |z - 3|$ (1).
Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι μία παραβολή.
β) Βρείτε επίσης το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών z, που είναι τέτοιοι ώστε $\left|\mathrm{Re}(z) - 2\right| = |z + 2|$ (2).

α) Αν $z = x + yi$ έχουμε:

$$(1) \Leftrightarrow |x + 3| = |x + yi - 3| \Leftrightarrow |x + 3| = \left|(x - 3) + yi\right|$$

$$\Leftrightarrow |x + 3|^2 = \left|(x - 3) + yi\right|^2 \Leftrightarrow$$

$$(x + 3)^2 = (x - 3)^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 \Leftrightarrow \boxed{y^2 = 12x}$$

Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η παραβολή με εστία $E(3,0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta : x = -3$.

β) Αν $z = x + yi$ έχουμε:

$$(2) \Leftrightarrow |x - 2| = |x + yi + 2| \Leftrightarrow$$

$$|x - 2| = \left|(x + 2) + yi\right| \Leftrightarrow |x - 2|^2 = \left|(x + 2) + yi\right|^2 \Leftrightarrow$$

$(x-2)^2=(x+2)^2+y^2 \Leftrightarrow$

$x^2-4x+4=x^2+4x+4+y^2 \Leftrightarrow \boxed{y^2=-8x}$.

Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η παραβολή με εστία $E(-2,0)$ και διευθετούσα την ευθεία $\delta: x=2$.

- *Ότι θα υπήρχε τελικά άσκηση και με παραβολή δεν το περίμενα! Τώρα να σας ρωτήσω κάτι;*

- Τι; Σοφία;

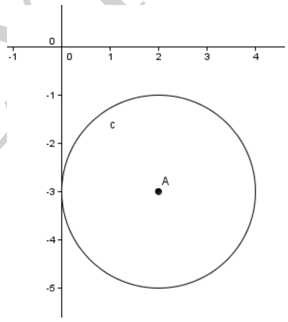
- *Οι δυο γραμμές: η ευθεία και ο κύκλος, με τις οποίες πέρσι ασχοληθήκαμε τόσο πολύ, εμφανίζονται στους μιγαδικούς αριθμούς; Θέλω να πω: άξιζε τον κόπο που δουλέψαμε μαζί τους;*

- Είναι όπως ακριβώς το φαντάστηκες! Στους μιγαδικούς και η ευθεία και ο κύκλος εμφανίζονται πολύ συχνά. Θα σου δώσω δυο ασκήσεις γι αυτά αλλά μετά θα σου πω μερικά πράγματα για τα μέγιστα και τα ελάχιστα που ζητούνται σχετικά.

ΑΣΚΗΣΗ

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών $z=x+yi$, $x,y\in\mathbb{R}$ που ικανοποιούν τις παρακάτω σχέσεις:
α) $|z-2+3i|=2$ (1), β) $|z-i|=|z-2|$, (2)

α) $|z-2+3i|=2 \Leftrightarrow |z-(2-3i)|=2$. Σύμφωνα με την $1^η$ μεθοδολογία που σου έδωσα πριν ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος κέντρου $K(2,-3)$ και ακτίνας $\rho=2$.
(Η εξίσωση του παραπάνω κύκλου είναι: $(x-2)^2+(y+3)^2=4$)



β΄ τρόπος:

$(1) \Leftrightarrow |z-2+3i|=2 \Leftrightarrow |z-2+3i|^2=2^2$

$\Leftrightarrow (z-2+3i)(\bar{z}-2-3i)=4$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-2z-3zi-2\bar{z}+4+6i+3\bar{z}i-6i+9=4$

$\Leftrightarrow z\bar{z}-2(z+\bar{z})-3(z-\bar{z})i+9=0$

$\overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} x^2+y^2-2\cdot 2x-3\cdot 2yi^2+9=0$

$\Leftrightarrow \boxed{x^2+y^2-4x+6y+9=0}$

Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει τα σημεία κύκλου αφού: $(-4)^2+6^2-4\cdot 9=16>0$, κέντρου $K\left(-\frac{-4}{2},-\frac{6}{2}\right)=K(2,-3)$ και ακτίνας $\rho=\frac{\sqrt{16}}{2}=2$.

γ΄ τρόπος:

$(1) \Leftrightarrow |z-2+3i|=2 \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} |(x+yi)-2+3i|=2 \Leftrightarrow$

$|(x-2)+(y+3)i|=2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=2$

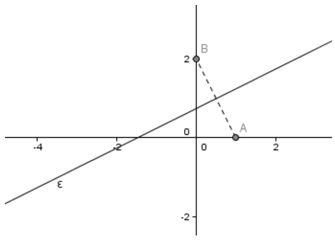
$\Leftrightarrow \boxed{(x-2)^2+(y+3)^2=4}$

Η παραπάνω εξίσωση παριστάνει τα σημεία κύκλου κέντρου $K(2,-3)$ και ακτίνας $\rho=2$.

β) $|z-i|=|z-2| \Leftrightarrow |z-(0+1\cdot i)|=|z-(2+0\cdot i)|$

Άρα, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι τα σημεία της μεσοκαθέτου (ε) του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ με Α(0,1) και Β(2,0). (Αν $K\left(\frac{0+2}{2},\frac{1+0}{2}\right)=K\left(1,\frac{1}{2}\right)$ το μέσο του ΑΒ και $\lambda=\frac{0-1}{2-0}=-\frac{1}{2}$ ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΒ τότε ο συντελεστής διεύθυνσης της μεσοκαθέτου (ε) είναι: $\lambda\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow \lambda=2$, και η εξίσωσή της: $y-\frac{1}{2}=2\cdot(x-1) \Leftrightarrow 2y-1=4x-4 \Leftrightarrow$

$\boxed{4x-2y-3=0}$



β΄τρόπος

$|z-i|=|z-2| \Leftrightarrow |z-i|^2=|z-2|^2 \Leftrightarrow$

$(z-i)(\bar{z}+i)=(z-2)(\bar{z}-2) \Leftrightarrow$

$z\bar{z}+zi-\bar{z}i+1=z\bar{z}-2z-2\bar{z}+4 \Leftrightarrow$

$(z-\bar{z})i+2(z+\bar{z})-3=0 \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow}$

$2yi^2+2\cdot 2x-3=0 \Leftrightarrow \boxed{4x-2y-3=0}$

Άρα, ο γ.τ. των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z, είναι η ευθεία με εξίσωση: $4x-2y-3=0$

γ΄ τρόπος:

$|z-i|=|z-2| \overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow} |x+yi-i|=|x+yi-2| \Leftrightarrow$

$|x+(y-1)i|=|(x-2)+yi| \Leftrightarrow$

$\sqrt{x^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+y^2} \Leftrightarrow$

$x^2+(y-1)^2=(x-2)^2+y^2 \Leftrightarrow ... \boxed{4x-2y-3=0}$.

Άρα, ο γ.τ. των εικόνων του μιγαδικού αριθμού z, είναι η ευθεία με εξίσωση: $4x-2y-3=0$

- *Όλοι οι δρόμοι, οδηγούν στη Ρώμη!*

- Πρόσεξε όμως! Αν ο μιγαδικός αριθμός z δεν είναι της μορφής: $z=x+yi$ αλλά της μορφής: $z=f(x,y)+g(x,y)i$, δηλαδή το πραγματικό και φανταστικό μέρος του είναι παραστάσεις του x και y (π.χ. $z=(3x+y)+(x-y)i$) **δεν ισχύουν** οι μεθοδολογίες που είπαμε. Στη περίπτωση αυτή ο γεωμετρικός τόπος θα βρεθεί από την εξίσωση που θα προκύψει από την αντικατάσταση στη δοσμένη σχέση του z με την μορφή που δίνεται. Δες τη παρακάτω άσκηση:

ΑΣΚΗΣΗ

Να βρεθεί ο γ. τ. των σημείων M(x,y) του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $|2z-1-i|=5$ (2) όπου $z=(3x-y)+2i$.

Αντικαθιστώντας τον μιγαδικό αριθμό z στην (2) προκύπτει:

$|2[(3x-y)+2i]-1-i|=5 \Leftrightarrow$

$|(6x-2y-1)+3i|=5 \Leftrightarrow \sqrt{(6x-2y-1)^2+9}=5 \Leftrightarrow$

$(6x-2y-1)^2+9=25 \Leftrightarrow (6x-2y-1)^2-16=0$

$\Leftrightarrow (6x-2y-1-4)(6x-2y-1+4)=0 \Leftrightarrow$

$6x-2y-5=0$ ή $6x-2y+3=0$.

Άρα : ο γ. τ. των σημείων M(x,y) είναι δύο ευθείες παράλληλες με εξισώσεις:

$$6x-2y-5=0 \text{ ή } 6x-2y+3=0.$$

Τώρα σε παρακαλώ πήγαινε πάλι πίσω και διάβασε την 8η την 9η και την 10η μεθοδολογία. Αυτές οι τρείς δεν ερμηνεύονται εύκολα γεωμετρικά. Γι αυτό θα τις αντιμετωπίζεις αλγεβρικά. Θα αντικαθιστάς τον μιγαδικό z με $z=x+yi$ και θα καταλήγεις σε μια εξίσωση που θα παριστάνει γνωστή γραμμή. Όσον αφορά τον Απολλώνιο κύκλο αρκεί να θυμηθείς ότι είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που έχουν λόγο αποστάσεων από δύο σημεία σταθερό. Ο κύκλος αυτός έχει διάμετρο τα συζυγή αρμονικά των σημείων αυτών.

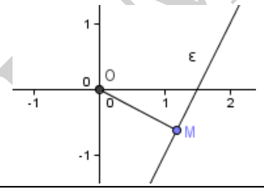
- *Με τα μέγιστα και τα ελάχιστα μέτρα τι θα μου λέγατε;*

- Εδώ υπάρχουν ωραίες μεθοδολογίες που αν τις μάθεις καλά θα μπορείς να αντιμετωπίσεις ό,τι άσκηση σου ζητηθεί.

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΕΣ

1η : *Αν οι εικόνες ενός μιγαδικού αριθμού z διατρέχουν μια ευθεία (ε) τότε το μέτρο του*

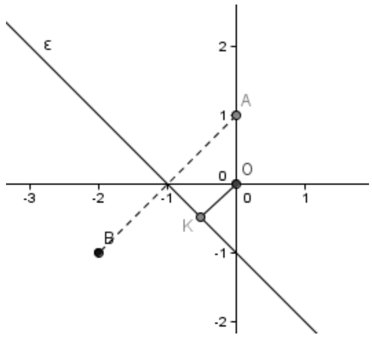
- *δεν παίρνει μέγιστη τιμή, ενώ*
- *παίρνει ελάχιστη τιμή την απόσταση του* $O(0,0)$ *από την (ε).*



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1:

Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z-i|=|z+2+i|$ να βρείτε:
i) Τη γραμμή που διαγράφει η εικόνα Μ του z
ii) Την ελάχιστη τιμή του $|z|$

i) Προφανώς οι εικόνες του z διατρέχουν την ευθεία που είναι μεσοκάθετος του AB όπου A η εικόνα του i και B η εικόνα του $-2-i$ δηλαδή $A(0,1)$ και $B(-2,-1)$.



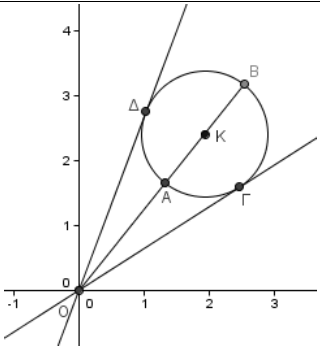
Η εξίσωση της είναι: $x+y+1=0$. Θυμάσαι πώς αποδεικνύεται αυτό;

- *Με πολλούς τρόπους!*

ii) Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι:

$$d(O,\varepsilon)=\frac{|0+0+1|}{\sqrt{1+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2η : *Αν οι εικόνες ενός μιγαδικού αριθμού z διατρέχουν έναν κύκλο* (K,ρ) *τότε:*



• *η ελάχιστη τιμή του* $|z|$ *είναι:*

$(OA)=|(OK)-(KA)|=|(OK)-\rho|$

και

• *η μέγιστη τιμή του* $|z|$

είναι: $(OB)=(OK)+(KB)=\ (OK)+\rho$

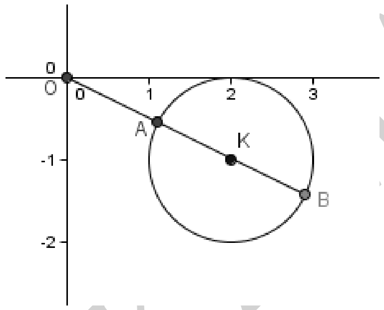
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2:

Αν για το μιγαδικό z ισχύει $|z-2+i|=1$, να βρεθεί:
i) Η γραμμή που διαγράφει η εικόνα Μ του z,
ii) Η μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z|$.

i) Έχουμε $|z-2+i|=1 \Leftrightarrow |z-(2-i)|=1$

Άρα το Μ κινείται σε κύκλο κέντρου $K(2,-1)$ και ακτίνας $\rho=1$

ii) Η ελάχιστη τιμή του $|z|$ είναι: $(OA)=(OK)-\rho=\sqrt{5}-2$.

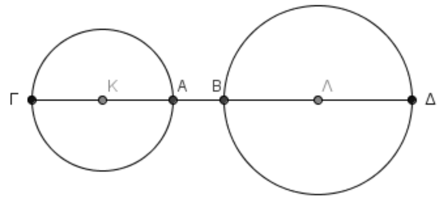


- Γιατί $(OK)=\sqrt{5}$;
- *Διότι* $(OK)=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$

iii) Η μέγιστη τιμή του $|z|$ είναι: $(OB)=(OK)+\rho=\sqrt{5}+2$. Υπ' όψιν ότι οι μιγαδικοί που έχουν μέτρο $\sqrt{5}-2$ και $\sqrt{5}+2$ είναι αυτοί που έχουν εικόνες τα σημεία Α και Β αντίστοιχα.

3η : *Αν οι εικόνες* M_1 *και* M_2 *δυο μιγαδικών αριθμών* z_1, z_2 *διατρέχουν δυο κύκλους* (K,R) *και* (Λ,ρ) *αντίστοιχα με* $K\Lambda > R+\rho$ *τότε:*

• *η ελάχιστη τιμή της απόστασής τους, δηλαδή του* $|z_1-z_2|$ *είναι:* $(AB)=(K\Lambda)-R-\rho$ *ενώ*



• *η μέγιστη τιμή της απόστασής τους δηλαδή του* $|z_1-z_2|$ *είναι:* $(\Gamma\Delta)=(K\Lambda)+R+\rho$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3:

Αν για τους μιγαδικούς z_1, z_2 ισχύουν οι σχέσεις: $|z_1-i|=1$ και $|z_2-3|=2$, να βρείτε την μέγιστη και ελάχιστη τιμή του $|z_1-z_2|$.

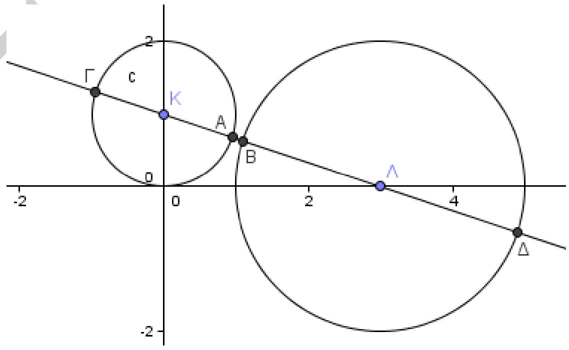
Προφανώς οι εικόνες M_1, M_2 των z_1, z_2 κινούνται στους κύκλους $(K,1)$ με $K(0,1)$ και $(\Lambda,2)$ με $\Lambda(3,0)$ αντίστοιχα. $((K\Lambda)=...=\sqrt{10})$

Άρα η ελάχιστη τιμή του $|z_1-z_2|$ είναι:

$(AB)=(K\Lambda)-R-\rho=\sqrt{10}-1-2=\boxed{\sqrt{10}-3}$

ενώ η μέγιστη:

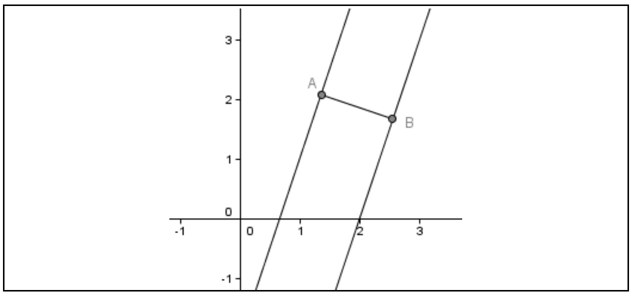
$(\Gamma\Delta)=(K\Lambda)+R+\rho=\sqrt{10}+1+2=\boxed{\sqrt{10}+3}$



Υπ' όψιν ότι οι μιγαδικοί που αντιστοιχούν στις τιμές $\sqrt{10}-3$ και $\sqrt{10}+3$ είναι αυτοί που έχουν εικόνες τα σημεία Α, Β, Γ και Δ.

4η: *Αν οι εικόνες* M_1 *και* M_2 *δυο μιγαδικών αριθμών* z_1, z_2 *διατρέχουν δυο παράλληλες ευθείες* ε_1 *και* ε_2 *αντίστοιχα, τότε:*

- *η ελάχιστη τιμή του:* $|z_1-z_2|$ *είναι η απόσταση των δύο ευθειών:* $d(\varepsilon_1,\varepsilon_2)=(AB)$
- *η παράσταση* $|z_1-z_2|$ *δεν παίρνει μέγιστη τιμή*



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4:

Έστω οι μιγαδικοί z_1, z_2 έτσι ώστε $|z_1 - i| = |z_1 - 1|$ και $|z_1 - 1| = |z_1 - (2 - i)|$. Να βρείτε τη μικρότερη τιμή του $|z_1 - z_2|$.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι οι εικόνες των μιγαδικοί z_1 και z_2 κινούνται στις ευθείες $\varepsilon_1 : x - y = 0$ και $\varepsilon_2 : x - y - 2 = 0$ (μεσοκάθετοι των τμημάτων ΑΒ και ΓΔ με $A(0,1), B(1,0)$ και $\Gamma(1,0), \Delta(2,-1)$).

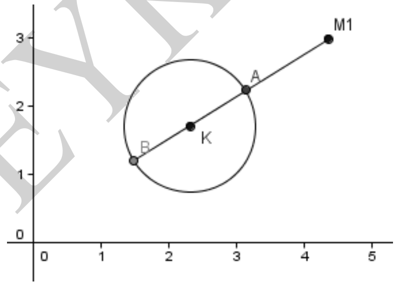
Η ελάχιστη τιμή του $|z_1 - z_2|$ είναι η απόσταση των ε_1 και ε_2 δηλαδή $d(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = ... = \sqrt{2}$

- Θυμάσαι Σοφία πως βρίσκουμε την απόσταση δύο ευθειών;

- *Ναι! Παίρνω ένα σημείο της μιας και υπολογίζω την απόστασή του από την άλλη ή εφαρμόζω τον τύπο* $\dfrac{|\beta_1 - \beta_2|}{\sqrt{1+\lambda^2}}$, *όπου* $\varepsilon_1 : y = \lambda x + \beta_1$ *και* $\varepsilon_2 : y = \lambda x + \beta_2$ *που υπήρχε πέρσι σε εφαρμογή στο σχολικό βιβλίο.*

- Μπράβο! Συνεχίζουμε.

5^{η}: *Αν οι εικόνες Μ του μιγαδικού αριθμού z κινούνται σε κύκλο και z_1 ένας μιγαδικός αριθμός και M_1 η εικόνα του στο επίπεδο, τότε:*

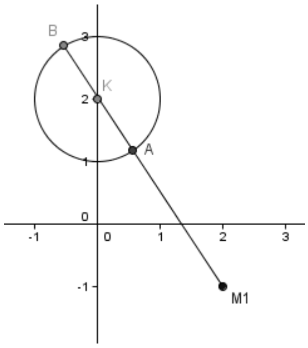


- *η ελάχιστη τιμή της:* $|z - z_1|$ *είναι:* $(M_1A) = |(M_1K) - \rho|$ *και*
- η μέγιστη τιμή του: $|z - z_1|$ είναι: $(M_1B) = (M_1K) + \rho$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

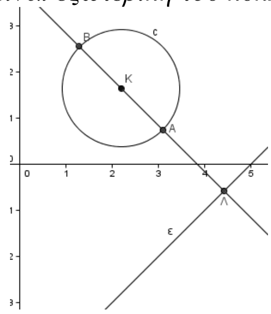
Αν για το μιγαδικό αριθμό z ισχύει: $|z - 2i| = 1$ να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της παράστασης: $A = |z - 2 + i|$

Από τη σχέση $|z - 2i| = 1$ προκύπτει ότι η εικόνα του z κινείται στον κύκλο κέντρου $K(0,2)$ και ακτίνας 1 ενώ αναζητούμε το μέγιστο και το ελάχιστο της παράστασης $A = |z - (2 - i)|$ η οποία δηλώνει την απόσταση της εικόνας του z από την εικόνα $2 - i$.



Άρα: Η ελάχιστη τιμή του είναι: $(M_1A) = |(M_1K) - \rho| = \sqrt{13} - 1$ (M_1 η εικόνα του $z_1 = 2 - i$) και η μέγιστη τιμή του είναι: $(M_1B) = (M_1K) + \rho = \sqrt{13} + 1$

6^{η}: *Αν οι εικόνες Μ του μιγαδικού αριθμού z κινούνται σε κύκλο c και οι εικόνες Ν του w σε ευθεία ε που είναι εξωτερική του κύκλου c, τότε:*



- *η ελάχιστη τιμή της παράστασης:* $|z - w|$ *είναι:* $(A\Lambda) = (K\Lambda) - \rho$ *και*
- *η παράστασης:* $|z - w|$ *δεν παίρνει μέγιστη τιμή.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

α) Να βρεθεί στο μιγαδικό επίπεδο ο γ.τ. των εικόνων P(z) των μιγαδικών $z = x + yi$ που ικανοποιούν τη σχέση $|z - 1 - 4i| = 2$ και ο γ.τ. των εικόνων M(w) των μιγαδικών $w = x + yi$ που ικανοποιούν τη σχέση. $|w + 2| = |w - 2 + 8i|$
β) Να βρεθεί στη συνέχεια η ελάχιστη τιμή της παράστασης $|z - w|$, όπου z και w οι μιγαδικοί του ερωτήματος (α).

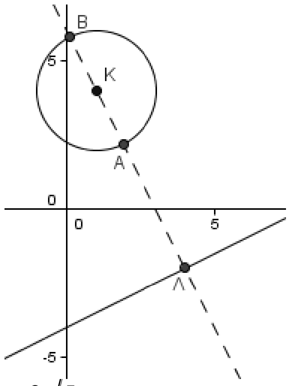
α) Οι μιγαδικοί z για τους οποίους ισχύει:

$|z-(1+4i)|=2$ έχουν εικόνες σε κύκλο $K(1,4)$ και $\rho=2$ δηλαδή στον κύκλο με εξίσωση: $(x-1)^2+(y-4)^2=4$. Οι μιγαδικοί w για τους οποίους ισχύει: $|w-(-2)|=|w-(2-8i)|$ (1), έχουν εικόνες στη μεσοκάθετο του τμήματος με άκρα $(-2,0)$ και $(2,-8)$. Για την εξίσωσή της έχουμε:

$|x+yi+2|=|x+yi-2+8i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(x+2)^2+y^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+8)^2}=$

$x-2y-8=0$ (ε).



β) Η παράσταση $d=|z-w|$ εκφράζει την απόσταση των εικόνων των μιγαδικών z και w. Η ελάχιστη τιμή της είναι η απόσταση ΑΛ.

Όμως

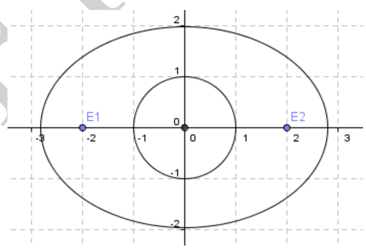
$$K\Lambda=d(K,\varepsilon)=\frac{|1-2\cdot 4-8|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=3\sqrt{5}$$

Άρα: $A\Lambda=d(K,\varepsilon)-\rho=3\sqrt{5}-2$

- *Νομίζω πως ένα παρόμοιο θέμα ζήτησαν στις Πανελλήνιες εξετάσεις πρόσφατα.*

- Πράγματι. Σοφία, σε κούρασα με όλα αυτά. Όμως είναι βασικές μεθοδολογίες που θα σου φανούν χρήσιμες όλη τη χρονιά. Φύλαξέ τες και κάπου-κάπου ρίχνε τους καμιά ματιά.

7η: *Αν οι εικόνες Μ του μιγαδικού αριθμού z κινούνται σε κύκλο c: $x^2+y^2=\rho^2$ και οι εικόνες Ν του w σε έλλειψη c_1: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$ με $\rho<\alpha<\beta$ τότε:*



- *η ελάχιστη τιμή της παράστασης:* $|z-w|$ *είναι:* $\beta-\rho$ *και*
- *η μεγαλύτερη τιμή της παράστασης:* $|z-w|$ *είναι:* $\alpha+r$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Θεωρούμε τους μιγαδικούς z και w για τους οποίους ισχύουν οι επόμενες σχέσεις: $|z-1|^2+|z+1|^2=4$, (1) $|w-5\bar{w}|=12$ (2)

Α) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z στο επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=1$.

Β) Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών w στο επίπεδο είναι η έλλειψη με εξίσωση: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Γ) Για τους μιγαδικούς αριθμούς z, w που επαληθεύουν τις σχέσεις (1) και (2) να αποδείξετε ότι: $1\le|z-w|\le 4$.

ΛΥΣΗ

Α) Η σχέση (1) παριστάνει τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών z των οποίων το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων από τα σημεία $\Delta(1,1)$ και $\Gamma(-1,0)$ ισούται με το τετράγωνο του (ΓΔ). (Προφανώς $(\Gamma\Delta)^2=4$). Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι ο κύκλος με διάμετρο το ΓΔ δηλαδή με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 1.

Β) Έστω ο μιγαδικός $w=x+yi$. Για τη σχέση (2) έχουμε:

$|w-5\bar{w}|=12 \Leftrightarrow |x+yi-5(x-yi)|=12 \Leftrightarrow$

$|-4x+6yi|=12 \Leftrightarrow |2x-3yi|=6 \Leftrightarrow \sqrt{4x^2+9y^2}=6$

$\Leftrightarrow 4x^2+9y^2=36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

Γ)

Μέγιστη τιμή του $|z-w|$ είναι $A\Gamma=4$ και ελάχιστη τιμή $BE=1$. Άρα: $1\le|z-w|\le 4$