ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Θεώρημα Ενδιαμέσων Τιμών (σχολικό βιβλίο σελ. 194)

Α.2 Ορισμός (σχολικό βιβλίο σελ. 188)

Α.3 Ορισμός (σχολικό βιβλίο σελ. 258)

Α.4 α) Λάθος

β) Σωστό

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β.1 $|z-4|=2|z-1| \Leftrightarrow |z-4|^2=4|z-1|^2 \Leftrightarrow$

$(z-4)(\overline{z}-4)=4(z-1)(\overline{z}-1) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow z\overline{z}=4$

$\Leftrightarrow |z|^2=4 \Leftrightarrow \boxed{|z|=2}$

Β.2 $|z_1|=2 \Rightarrow |z_1|^2=4 \Rightarrow z_1\overline{z_1}=4 \Rightarrow \frac{1}{z_1}=\frac{\overline{z_1}}{4}$

Όμοια, $\frac{1}{z_2}=\frac{\overline{z_2}}{4}$. Άρα:

α) $w=2\left(z_1\frac{\overline{z_2}}{4}+z_2\frac{\overline{z_1}}{4}\right)=\frac{1}{2}2\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)=\operatorname{Re}\left(z_1\overline{z_2}\right)$

Άρα ο w πραγματικός αριθμός.

β) $|w|=\frac{1}{2}\left|z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}\right| \le \frac{1}{2}\left(\left|z_1\overline{z_2}\right|+\left|z_2\overline{z_1}\right|\right)=$

$\frac{1}{2}\left(|z_1|\left|\overline{z_2}\right|+|z_2|\left|\overline{z_1}\right|\right)=\frac{1}{2}(4+4)=4 \Rightarrow |w|\le 4$

$\Rightarrow -4 \le w \le 4$

Β.3 $w=-4 \Rightarrow 2\left(\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}\right)=-4 \Rightarrow \frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1}=-2$

$\Rightarrow \frac{z_1^{\,2}+z_2^{\,2}}{z_1 z_2}=-2 \Rightarrow (z_1+z_2)^2=0 \Rightarrow z_2=-z_1$

Έστω $A(z_1), B(z_2)$ και $\Gamma(z_3)$ οι εικόνες των μιγαδικών z_1, z_2 και z_3 αντίστοιχα τότε:

$(A\Gamma)=|z_1-z_3|=|z_1-2iz_1|=|z_1(1-2i)|=$
$|z_1||1-2i|=2\sqrt{5}$

$(B\Gamma)=|z_2-z_3|=|-z_1-2iz_1|=|-z_1(1+2i)|=$
$|-z_1||1+2i|=2\sqrt{5}$

Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.

ΘΕΜΑ Γ

Γ.1 Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)=\frac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2}\ge 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (μηδενίζεται μόνο για $x=1$) άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Επομένως το σύνολο τιμών της είναι: $f(A)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}f(x), \lim\limits_{x\to+\infty}f(x)\right)$

Όμως: $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x\cdot\frac{1}{x^2+1}\right)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2+1}=0\cdot 0=0$ και

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^2+1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(x^2+1)'}=$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^x)'}{(2x)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{2}=+\infty$

Άρα: $\boxed{f(A)=(0,+\infty)}$

Γ.2 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5} \Leftrightarrow$

$f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=f(2) \overset{"1-1"}{\Leftrightarrow} e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)=2 \Leftrightarrow$

$\frac{e^3}{2}=\frac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}$. Επειδή $\frac{e^3}{2}\in(0,+\infty)$ υπάρχει και μάλιστα μοναδικό (διότι η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1-1»), $x_0 \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$f\left(x_0\right)=\frac{e^3}{2}$

Γ.3 Για κάθε $x>0$, $\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x) \Leftrightarrow$

$\int_0^{4x} f(t)dt-\int_0^{2x} f(t)dt<(4x-2x)f(4x)$, (1)

Θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ στο διάστημα $[2x,4x]$. Έτσι,

Η (1) $\Leftrightarrow F(4x)-F(2x)<2xf(4x)$ (2)

Η F συνεχής στο $[2x,4x]$ και παραγωγίσιμη στο $(2x,4x)$ με $F'(x)=f(x)$ οπότε από το Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι υπάρχει $\xi\in(2x,4x)$ ώστε:

$F'(\xi)=\frac{F(4x)-F(2x)}{4x-2x} \Rightarrow F(4x)-F(2x)=2xf(\xi)$

Έτσι η αποδεικτέα σχέση (2) μετατρέπεται ισοδύναμα στην : $2xf(\xi)<2xf(4x)$ δηλαδή στην $f(\xi)<f(4x)$ που ισχύει αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα και $\xi<4x$.

Γ.3 Η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$(ως πηλίκο συνεχών …). Θα αποδείξουμε τη συνέχεια της g στο 0. Για $x>0$,

$$\lim_{x\to0} g(x)=\lim_{x\to0}\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to0}\frac{\left(\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right)'}{x'}=$$

$$\lim_{x\to0}\frac{-2f(2x)+4f(4x)}{1}\overset{f(0)=1}{=}4-2=2=g(0)$$

Άρα η g είναι συνεχής στο 0.

Για $x>0$, $g'(x)=\left(\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x}\right)'=$

$$\frac{\left[-2f(2x)+4f(4x)\right]x-\int_{2x}^{4x} f(t)dt}{x^2}=$$

$$\frac{\left[2xf(2x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt\right]+2\left(f(4x)-f(2x)\right)}{x^2}>0$$

Διότι: από το ερώτημα Γ.2 έχουμε ότι: $2xf(2x)-\int_{2x}^{4x} f(t)dt>0$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα έχουμε: $4x>2x \Rightarrow f(4x)>f(2x) \Rightarrow f(4x)-f(2x)>0$

Άρα η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

$f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}-e^{-f(x)}\right)'=(2x)'$

$\Leftrightarrow e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c$. Για $x=0$… $c=0$

Άρα: $e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x \Leftrightarrow e^{f(x)}-\frac{1}{e^{-f(x)}}=2 \Leftrightarrow$

$\left(e^{f(x)}\right)^2-2xe^{f(x)}-1=0 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}-x\right)^2=1+x^2$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=e^{f(x)}-x$ στο $\mathbb{R}$

Η συνάρτηση h είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$. Αν υπήρχε $x_0\in\mathbb{R}$ ώστε $h\left(x_0\right)=0$ θα ίσχυε: $e^{f(x_0)}-x_0=0$ δηλαδή $1+{x_0}^2=0$ άτοπο. Άρα $e^{f(x)}-x\neq0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $\mathbb{R}$. Όμως $h(0)=e^{f(0)}-0=e>0$. Άρα $h(x)=e^{f(x)}-x>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επομένως $e^{f(x)}-x=\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow e^{f(x)}=x+\sqrt{1+x^2}$

$\Leftrightarrow f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$, $x\in\mathbb{R}$

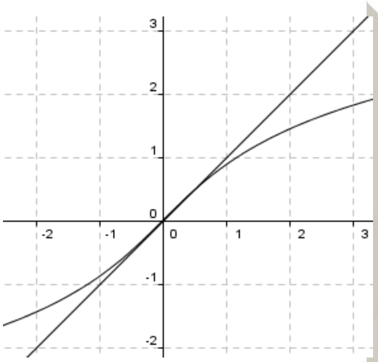
Δ.2 **α)** Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \ldots = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \text{ και}$$

$$f''(x) = \ldots = \frac{-2x}{\sqrt{1+x^2}} = -\frac{x}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}$$

- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$
- $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x > 0$
- $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Άρα η f κυρτή στο $(-\infty, 0]$, κοίλη στο $[0, +\infty)$ ενώ παρουσιάζει σημείο καμπής στο $(0, f(0)) = (0, 0)$.



β) Η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(0,0)$ έχει εξίσωση:
$y - f(0) = f'(0)(x-0)$ δηλαδή $y - 0 = 1\cdot(x-0)$ δηλαδή $y = x$. Επειδή στο διάστημα $[0,1]$ η f είναι κοίλη, η γραφική της παράσταση βρίσκεται κάτω από την ευθεία $y = x$. Άρα $f(x) - x < 0$ στο $[0,1]$. Έτσι,

$$E = \int_0^1 |f(x) - x|\,dx = \int_0^1 \left(x - f(x)\right)dx =$$

$$\int_0^1 x\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \int_0^1 \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2} - \int_0^1 x' \cdot \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)dx =$$

$$\frac{1}{2} - \left[x \cdot \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\right]_0^1 + \int_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx =$$

$$\frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \int_0^1 \left(\sqrt{1+x^2}\right)' dx =$$

$$\frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \left[\sqrt{1+x^2}\right]_0^1 =$$

$$\frac{1}{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) + \sqrt{2} - 1 = \boxed{\sqrt{2} - \ln\left(1+\sqrt{2}\right) - \frac{1}{2}}$$

Δ.3 **α΄ τρόπος:**

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)\ln|f(x)|\right] \overset{f(x)>0}{=}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)\ln f(x)\right] \overset{0\cdot(+\infty)}{=}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1}{\dfrac{1}{\ln f(x)}} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)'}{\left(\dfrac{1}{\ln f(x)}\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{\dfrac{-f'(x)}{f(x)\ln^2 f(x)}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{-e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f(x)\cdot f(x)\ln^2 f(x)}{f'(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{-e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f(x)\cdot\left(f(x)\ln f(x)\right)^2}{f'(x)} = 0$$

Διότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)\ln f(x)\right) \underset{\lim_{x\to 0^+} f(x)=0}{\overset{u=f(x)}{=}} \lim_{u\to 0^+}\left(u\ln u\right) \overset{0\cdot(+\infty)}{=} \ldots = 0$$

και $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{f'(x)} = \dfrac{0}{1} = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(-e^{\int_0^x f^2(t)dt}\right) = -1$

β΄ τρόπος:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)\ln f(x)\right] \overset{0\cdot(+\infty)}{=}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1}{f(x)}\cdot f(x)\cdot\ln f(x)\right] = 0\cdot 0 = 0$$. Διότι:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1}{f(x)} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)'}{\left(f(x)\right)'} =$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{f'(x)} = \frac{0}{1} = 0 \text{ και}$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left(f(x)\ln f(x)\right) \underset{\lim_{x\to 0^+} f(x)=0}{\overset{u=f(x)}{=}} \lim_{u\to 0^+}\left(u\ln u\right) \overset{0\cdot(-\infty)}{=} \ldots = 0$$

Υπ΄ όψιν:

$x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + 1 > 1 \Rightarrow \sqrt{x^2+1} > 1 \Rightarrow$
$x + \sqrt{x^2+1} > x + 1 > 1 \Rightarrow \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) > 0 \Rightarrow$
$f(x) > 0$

Δ.4 Για $x \neq 2,3$ η εξίσωση ισοδυναμεί με την:

$$\left(x-2\right)\left(1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt\right)+$$

$$\left(x-3\right)\left(8-3\int_0^{x-2} f^2\left(t\right)dt\right)=0$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση:

$$\varphi(x)=\left(x-2\right)\left(1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt\right)+$$

$$\left(x-3\right)\left(8-3\int_0^{x-2} f^2\left(t\right)dt\right) \text{ στο } \left[2,3\right]$$

- Η συνάρτηση φ είναι συνεχής (…) στο $\left[2,3\right]$
- $\varphi(2)=3\int_0^2 f^2(t)dt-8<0$ και

  $\varphi(3)=1-3\int_0^2 f(t^2)dt>0$

Όμως, $0 \leq f(x) \leq x$ για κάθε $x \geq 0$. Άρα: $f^2(t) \leq t^2$

$$f^2(t) \leq t^2 \Rightarrow \int_0^2 f^2(t)dt < \int_0^2 t^2dt \Rightarrow \int_0^2 f^2(t)dt < \frac{8}{3}$$

και $f(t^2) \leq t^2 \Rightarrow \int_0^1 f(t^2)dt < \int_0^1 t^2dt \Rightarrow \int_0^1 f(t^2)dt < \frac{1}{3}$

Άρα από θ. Bolzano υπάρχει στο $\left(2,3\right)$ μια τουλάχιστον ρίζα της $\varphi(x)=0$ και ισοδύναμα της αρχικής αφού η ρίζα αυτή είναι διάφορη του 2 και 3 .

Κώστας Βακαλόπουλος
Μαθηματικός , MSc in Statistics