ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ Β΄ΛΥΚΕΙΟΥ
ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

των Κώστα Βακαλόπουλου, Βασίλη Καρκάνη, Άννας Βακαλοπούλου

Άσκηση 1η

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ διάφορα του μηδενικού για τα οποία ισχύει:
$\left|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right|=\sqrt{21}$, $\left|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=2$ και $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$

i) Να βρεθούν τα μέτρα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

ii) Να βρεθεί η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$.

iii) Να δείξετε ότι: $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\vec{\alpha}$

iv) Αν $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ όπου O η αρχή των αξόνων να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου OAB

Λύση

i) Έχουμε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=1$ (1)

Επίσης: $\left|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right|=\sqrt{21}\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right|^2=\sqrt{21}^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}+2\vec{\beta}\right)^2=21\Leftrightarrow\vec{\alpha}^2+4\vec{\alpha}\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=21$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\left|\vec{\alpha}\right|^2+4\left|\vec{\beta}\right|^2=17 \quad (2)$$

Ακόμη: $\left|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=2\Leftrightarrow\left|2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|^2=2^2\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)^2=4\Leftrightarrow4\vec{\alpha}^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2=4\overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\Leftrightarrow4\left|\vec{\alpha}\right|^2+\left|\vec{\beta}\right|^2=8 \quad (3)$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (2), (3) παίρνουμε:

$$\left.\begin{aligned}\left|\vec{\alpha}\right|^2&=1\\\left|\vec{\beta}\right|^2&=4\end{aligned}\right\}\Leftrightarrow\begin{aligned}\left|\vec{\alpha}\right|&=1\\\left|\vec{\beta}\right|&=2\end{aligned}$$

ii) Είναι: $\text{συν}\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\dfrac{\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}}{\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|}\overset{(1),(i)}{=}\dfrac{1}{1\cdot2}=\dfrac{1}{2}$ άρα :

$$\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\frac{\pi}{3}$$

iii) Έχουμε: $\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\vec{\alpha}\cdot\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=1\overset{\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\nearrow\nearrow\vec{\alpha}}{\Leftrightarrow}$

$\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\right|=1\overset{(i)}{\Leftrightarrow}\left|\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}\right|=1$. Άρα: $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}\vec{\beta}=\vec{\alpha}$

v) Είναι: $(OAB)=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{OA}\right|\cdot\left|\overrightarrow{OB}\right|\cdot\text{ημ}\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=$

$$=\frac{1}{2}\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\text{ημ}\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)\overset{(i),(ii)}{=}\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\text{ημ}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ τ.μ.}$$

Άσκηση 2η

Δίνονται οι ευθείες:

$\varepsilon_1:2\left|\vec{\alpha}\right|x+\psi=5$, $\varepsilon_2:4\left|\vec{\beta}\right|x+\psi=-3$, $\varepsilon_3:x-4\psi=2$ όπου $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ δυο διανύσματα και $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$. Αν $\varepsilon_1//\varepsilon_2$, $\varepsilon_2\perp\varepsilon_3$ και $\left(\vec{\alpha},\vec{\beta}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$ τότε να δείξετε ότι: i) $\left|\vec{\alpha}\right|=2$, $\left|\vec{\beta}\right|=1$ και $\left|\vec{u}\right|=2\sqrt{3}$

ii) $\vec{\beta}\cdot\vec{u}=-3$ iii) $\left(\vec{\beta},\vec{u}\right)=5\left(-2\vec{\beta},\vec{u}\right)$.

Λύση

Έχουμε:

$$\varepsilon_1//\varepsilon_2\Leftrightarrow\lambda\varepsilon_1=\lambda\varepsilon_2\Leftrightarrow-2\left|\vec{\alpha}\right|=-4\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\left|\vec{\alpha}\right|=2\left|\vec{\beta}\right| \quad (1)$$

Επίσης:

$$\varepsilon_2\perp\varepsilon_3\Leftrightarrow\lambda\varepsilon_2\cdot\lambda\varepsilon_3=-1\Leftrightarrow-4\left|\vec{\beta}\right|\cdot\frac{1}{4}=-1\Leftrightarrow\left|\vec{\beta}\right|=1$$

Οπότε από την (1) είναι: $\left|\vec{\alpha}\right|=2$.

Επίσης: $\vec{u}=\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ οπότε $\left|\vec{u}\right|=\left|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\left|\vec{u}\right|^2=\left|\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right|^2=$

$$=\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2-4\vec{\alpha}\vec{\beta}+4\vec{\beta}^2=\left|\vec{\alpha}\right|^2-4\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\text{συν}\frac{2\pi}{3}+4\left|\vec{\beta}\right|^2=$$

$$=2^2-4\cdot2\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)+4\cdot1^2=4+4+4=12$$

άρα $\left|u\right|=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$.

ii) είναι: $\vec{\beta}\cdot\vec{u}=\vec{\beta}\cdot\left(\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}-2\vec{\beta}^2=$

$$=\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\text{συν}\frac{2\pi}{3}-2\left|\vec{\beta}\right|^2=2\cdot1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2\cdot1^2=-1-2=-3.$$

iii) Έχουμε: $\sigma\upsilon\nu\left(\vec{\beta},\vec{u}\right)=\dfrac{\vec{\beta}\cdot\vec{u}}{|\vec{\beta}|\cdot|\vec{u}|}\overset{(i),(ii)}{=}\dfrac{-3}{1\cdot 2\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

Άρα: $\left(\vec{\beta},\vec{u}\right)=\dfrac{5\pi}{6}$ (2)

Επίσης:

$\sigma\upsilon\nu\left(-2\vec{\beta},\vec{u}\right)=\dfrac{-2\vec{\beta}\cdot\vec{u}}{|-2\vec{\beta}|\cdot|\vec{u}|}\overset{(i),(ii)}{=}\dfrac{-\vec{\beta}\cdot\vec{u}}{|\vec{\beta}|\cdot|\vec{u}|}=\dfrac{-(-3)}{1\cdot 2\sqrt{3}}=$ Ά-

$\dfrac{3}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ρα: $\left(-2\vec{\beta},\vec{u}\right)=\dfrac{\pi}{6}$ (3)

Λόγω των (2), (3) είναι: $\left(\vec{\beta},\vec{u}\right)=5\left(-2\vec{\beta},\vec{u}\right)$.

Άσκηση 3η

Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ με Α(3,2), Β(–1,0) και Γ(–3,4)

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του:

Α.

- **i) Ορθόκεντρού του (Η)**
- **ii) Βαρύκεντρού του (G)**
- **iii) Περίκεντρού του (Ο) και**
- **iv) Έγκεντρού του (Ι)**

Β. Να βρεθεί η εξίσωση του περιγεγραμμένου κύκλου στο ΑΒΓ.

Λύση

(Θυμίζουμε ότι το ορθόκεντρο, το βαρύκεντρο, το περίκεντρο και το έγκεντρο ενός τριγώνου είναι το σημείο τομής των υψών, των διαμέσων, των μεσοκαθέτων και των διχοτόμων αντίστοιχα. Άρα λοιπόν αρκεί να υπολογίσουμε δυο από τα παραπάνω βοηθητικά στοιχεία κάθε φορά ώστε επιλύοντας το σύστημά των εξισώσεών τους να προσδιορίσουμε τα ζητούμενα σημεία).

i) Έστω υ_1 και υ_2 τα ύψη από τις κορυφές Α και Β. Επειδή $\upsilon_1\perp B\Gamma$ και $\upsilon_2\perp A\Gamma$ θα ισχύει:

$$\lambda_{\upsilon_1}\cdot\lambda_{B\Gamma}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\upsilon_1}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}\ \text{και}$$

$$\lambda_{\upsilon_1}\cdot\lambda_{A\Gamma}=-1\Leftrightarrow\lambda_{\upsilon_1}=\frac{-1}{-\frac{1}{3}}=3$$

Άρα οι εξισώσεις τους είναι:

$\upsilon_1: y-2=\dfrac{1}{2}(x-3)\Leftrightarrow 2y-4=x-3\Leftrightarrow \boxed{x-2y+1=0}$ (1)

$\upsilon_2: y-0=3(x+1)\Leftrightarrow y=3x+3\Leftrightarrow \boxed{3x-y+3=0}$ (2)

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) έχουμε τις συντεταγμένες του ορθοκέντρου.

$$\begin{cases}x-2y+1=0\\3x-y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow \ldots x=-1,\ y=0.$$

Άρα: το ορθόκεντρο είναι το σημείο Η(–1,0).

Παρατηρούμε ότι το ορθόκεντρο Η ταυτίζεται με το σημείο Β (κορυφή). Πράγματι, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο στο Β ($\lambda_{AB}\cdot\lambda_{B\Gamma}=\ldots=-1$).

ii) Έστω Κ και Λ τα μέσα των ΒΓ και ΑΓ τότε θα είναι: Κ(–2, 2), Λ(0,3). Επομένως οι εξισώσεις των διαμέσων από τις κορυφές Α και Β θα είναι:

$$AK: y-2=\frac{2-2}{3-2}(x-3)\Leftrightarrow \boxed{y=2} \quad (3)$$

και

$$B\Lambda: y-0=\frac{3-0}{0+1}(x+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=3(x+1)\Leftrightarrow \boxed{3x-y+3=0} \quad (4)$$

Παρατηρούμε ότι η διάμεσος από το Β ταυτίζεται με το ύψος από το Β. Πράγματι το τρίγωνο δεν είναι μόνο ορθογώνιο στο Β αλλά και ισοσκελές ((ΑΒ)=(ΒΓ)=…=$\sqrt{20}$).

Επιλύοντας το σύστημα των εξισώσεων (3) και (4) προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες του βαρύκεντρου

$$\begin{cases}y=2\\3x-y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\x=-\frac{1}{3}\end{cases}$$

Άρα: Το βαρύκεντρο είναι το σημείο $G\left(-\dfrac{1}{3},\,2\right)$.

Σημείωση: *Ως γνωστόν τις συντεταγμένες του βαρυκέντρου του ΑΒΓ μπορούμε να υπολογίσουμε και από τους τύπους:*

$$x_G=\frac{x_1+x_2+x_3}{3},\quad y_G=\frac{y_1+y_2+y_3}{3}$$

Όπου $A(x_1,y_1),\ B(x_2,y_2),\ \Gamma(x_3,y_3)$.

Έτσι: $x_G=\dfrac{3-1-3}{3}=-\dfrac{1}{3},\quad y_G=\dfrac{2+0+4}{3}=2$.

iii) Οι μεσοκάθετες ε_1και ε_2 στις πλευρές ΒΓ και ΑΓ θα έχουν εξίσωση: (Οι συντελεστές διεύθυνσης θα είναι ίσοι με τους συντελεστές διεύθυνσης των υψών $υ_1$ και $υ_2$ αντίστοιχα) ενώ τα μέσα τους Κ και Λ υπολογίστηκαν στο (ii)

Έτσι:

$$ε_1: y-2=\frac{1}{2}(x+2) \Leftrightarrow 2y-4=x+2 \Leftrightarrow \boxed{x-2y+6=0} \quad (5)$$

$$ε_2: y-3=3(x-0) \Leftrightarrow y-3=3x \Leftrightarrow \boxed{3x-y+3=0} \quad (6)$$

Επιλύοντας το σύστημα των (5) και (6) προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες του περικέντρου.

$$\begin{cases} x-2y+6=0 \\ 3x-y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow ...x=0,\ y=3$$

Άρα: Το περίκεντρο είναι το σημείο Ο(0,3)

Παρατηρούμε ότι το περίκεντρο είναι το μέσο της πλευράς ΑΓ. Αναμενόμενο (!) αφού ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ έχει διάμετρο την πλευρά ΑΓ.

iv) Οι διχοτόμοι των γωνιών Α και Β θα βρεθούν ως οι γεωμετρικοί τόποι των σημείων του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από τις πλευρές τους. Θα βρούμε καταρχήν τις εξισώσεις των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ.

$$AB: y-2=\frac{0-2}{-1-3}(x-3) \Leftrightarrow y-2=\frac{1}{2}(x-3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2y-4=x-3 \Leftrightarrow \boxed{x-2y+1=0} \quad (7)$$

$$ΑΓ: y-4=\frac{4-2}{-3-3}(x+3) \Leftrightarrow y-4=-\frac{1}{3}(x+3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3y-12=-x-3 \Leftrightarrow \boxed{x+3y-9=0} \quad (8)$$

$$ΒΓ: y-0=\frac{4-0}{-3+1}(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=-2(x+1) \Leftrightarrow \boxed{2x+y+2=0} \quad (9)$$

Έστω Μ(x, y) σημείο του επιπέδου. Αν το Μ ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας Α πρέπει και αρκεί

$$d(M,AB)=d(M,ΑΓ) \Leftrightarrow \frac{|x-2y+1|}{\sqrt{5}}=\frac{|x+3y-9|}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}(x-2y+1)=\pm(x+3y-9) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}-1\right)x+\left(-2\sqrt{3}-3\right)y+\left(\sqrt{2}+9\right)=0 \quad (δ_1)$$

$$ή \quad \left(\sqrt{2}+1\right)x+\left(-2\sqrt{3}+3\right)y+\left(\sqrt{2}-9\right)=0 \quad (δ_2)$$

Όμως η ($δ_1$) τέμνει την απέναντι πλευρά ΒΓ στο σημείο που θα προκύψει από τη λύση του συστήματος

$$\begin{cases} 2x+y+2=0 \\ \left(\sqrt{2}-1\right)x+\left(-2\sqrt{3}\cdot 3\right)y+\sqrt{2}+9=0 ...x=-0,61,\ y=... \end{cases}$$

Επειδή $-0,61 \notin [x_Γ, x_Β]=[-3,-1]$ η εσωτερική διχοτόμος είναι η ($δ_2$)

Για τη διχοτόμο της γωνίας Β τα πράγματα είναι απλά! Ταυτίζεται με το ύψος από το Β (ή τη διάμεσο από το Β).

Έτσι το έγκεντρο θα το βρούμε από την επίλυση του συστήματος:

$$\begin{cases} \left(\sqrt{2}+1\right)x+\left(-2\sqrt{2}+3\right)y+\sqrt{2}+9=0 \\ 3x-y+3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow ...x=\frac{-5\sqrt{2}+18}{5\sqrt{2}-10},\ y=\frac{17}{5\sqrt{2}-10}$$

Άρα: Το έγκεντρο είναι το σημείο

$$I\left(\frac{-5\sqrt{2}+18}{5\sqrt{2}-10}, \frac{17}{5\sqrt{2}-10}\right)$$

Β. Ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ έχει διάμετρο (όπως αναφέραμε) την πλευρά ΑΓ και κέντρο το μέσο της Λ(0 , 3).

Όμως: $\frac{(ΑΓ)}{2}=\frac{\sqrt{40}}{2}=\sqrt{10}$

Άρα η εξίσωσή του θα είναι:

$$(x-0)^2+(y-3)^2=\left(\sqrt{10}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{x^2+(y-3)^2=10}$$

Άσκηση 4η

Δυο χωριά, που βρίσκονται κοντά στη θάλασσα, στο χάρτη σ' ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων είναι στα σημεία Α(4, –1) και Β(1, –3). Στο ίδιο σύστημα αξόνων η παραλία εκτείνεται κατά μήκος της ευθείας (ε) με εξίσωση x–y–1=0. Ένα πυροσβεστικό όχημα ξεκινά από το χωριό Α και πρέπει το ταχύτερο δυνατόν να φτάσει στη θάλασσα για να γεμίσει νερό και στη συνέχεια να πάει στο χωριό Β για να σβήσει το φλεγόμενο σπίτι.

Αν υποθέσουμε ότι το πυροσβεστικό όχημα μπορεί να κινηθεί σε ευθεία γραμμή να βρεθούν οι εξισώσεις των ευθειών που θα ακολουθήσει από το χωριό Α προς την παραλία και από την παραλία προς το φλεγόμενο σπίτι (χωριό Β).

Λύση

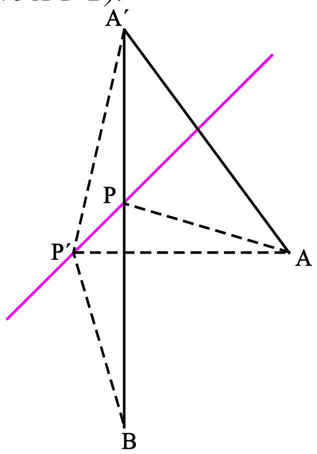
Σημείωση: *Από τη γεωμετρία και ειδικότερα από την τριγωνική ανισότητα γνωρίζουμε ότι η συντομότερη διαδρομή από το Α στο Β είναι μέσω εκείνου του σημείου P της (ε), που είναι η τομή της ΒΑ΄με την (ε) όπου το Α΄το συμμετρικό του Α ως προς την (ε).*

Πράγματι: *Έστω P το σημείο τομής της ΒΑ΄με την (ε). Αν υπήρχε άλλο σημείο P΄με γρηγορότερη διαδρομή, τότε:*

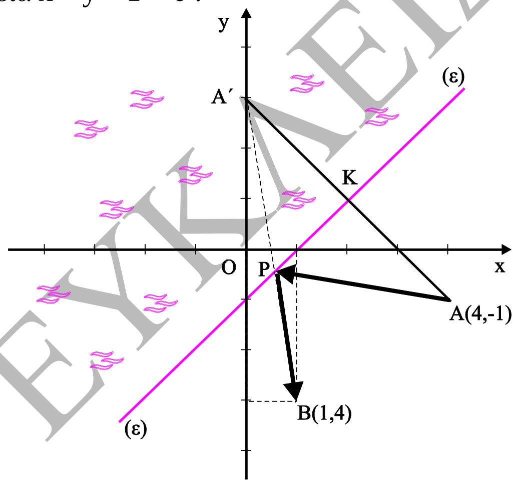
AP΄+P΄B<AP+PB⇔A΄P΄+P΄B<A΄P+PB⇔

A΄P΄+P΄B<A΄B άτοπο!

(αφού ισχύει: A΄P΄+P΄B >A΄B : τριγωνική ανισότητα στο τρίγωνο A΄P΄B).



Έστω Α΄το συμμετρικό του Α(4, –1) ως προς την ευθεία x – y – 1 = 0 .



Αν Α΄(μ, ν) τότε:

- $AA'\perp(\varepsilon)\Leftrightarrow\lambda_{AA'}\cdot\lambda_{\varepsilon}=-1\Leftrightarrow\dfrac{\nu+1}{\mu-4}\cdot 1=-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\nu+1=-\mu+4\Leftrightarrow\boxed{\mu+\nu=3}\quad(1)$

- Αν Κ το μέσο του ΑΑ΄ θα είναι $K\left(\dfrac{\mu+4}{2},\dfrac{\nu-1}{2}\right)$ και θα επαληθεύει την εξίσωση της (ε).

Άρα: $\dfrac{\mu+4}{2}-\dfrac{\nu-1}{2}-1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\mu+4-\nu+1=2\Leftrightarrow\boxed{\mu-\nu=-3}\qquad(2)$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) προσδιορίζουμε το σημείο Α΄:

$$\begin{cases}\mu+\nu=3\\ \mu-\nu=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(\mu+\nu)+(\mu-\nu)=0\\ \mu-\nu=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mu=0\\ \nu=3\end{cases}$$

Άρα: $\boxed{A'(0,3)}$

Η ευθεία Α΄Β έχει εξίσωση:

$$y-3=\frac{-3-3}{1-0}(x-0)\Leftrightarrow y=-6x+3\Leftrightarrow\boxed{6x+y-3=0}$$

Στη συνέχεια θα προσδιορίσουμε το σημείο τομής P των ευθειών Α΄Β και (ε) λύνοντας το σύστημα των εξισώσεών τους:

$$\begin{cases}x-y-1=0\\ 6x+y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}7x=4\\ x-y-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{4}{7}\\ y=-\dfrac{3}{7}\end{cases}$$

Άρα: $P(\frac{4}{7},-\frac{3}{7})$

Άρα: Η εξίσωση της διαδρομής από το χωριό Α προς την παραλία θα έχει εξίσωση: (γνωρίζουμε δυο σημεία της: Α(4, –1) και $P(\frac{4}{7},-\frac{3}{7})$):

$$y+1=\frac{-\frac{3}{7}+1}{\frac{4}{7}-4}(x-4)\Leftrightarrow y+1=-\frac{1}{6}(x-4).$$

$\Leftrightarrow\boxed{x+6y+2=0}$

Από τη παραλία προς το χωριό Β την βρήκαμε: $\boxed{6x+y-3=0}$

Άσκηση 5η

Τα σχέδια επέκτασης του υπογείου metro της πόλης του ΠΕΚΙΝΟΥ, περιλαμβάνουν:

α) Τη γραμμή γ_1 κάθε σημείο της οποίας σε ορθοκανονικό σύστημα αξόνων (στο χάρτη) είναι της μορφής: Α(λ+1, 3λ+1), λ∈R.

β) τη γραμμή γ_2 που περνάει από το σταθμό Σ(–3, 2) και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(-10,5)$.

i) Βρείτε τις εξισώσεις των νέων γραμμών γ_1 και

γ_2.

ii) Στο σημείο Ο(0, 0) στην αρχή των αξόνων κατασκευάζεται το στάδιο που θα φιλοξενήσει το αγώνισμα της Άρσης Βαρών. Δεδομένου ότι το κόστος κατασκευής ανά μονάδα μήκους γραμμής είναι το ίδιο με ποια γραμμή από τις γ_1 και γ_2 συμφέρει να συνδεθεί το στάδιο της Άρσης Βαρών.

iii) Αν το Ολυμπιακό χωριό βρίσκεται στο εσωτερικό του κύκλου με κέντρο το σημείο B(3, 1), ποια θα είναι η εξίσωση του κύκλου αυτού, ώστε να εφάπτεται της γραμμής γ_2.

Λύση

i) Έστω M(x, y) τυχαίο σημείο της ευθείας γ_1. Τότε $x = \lambda + 1$ και $y = 3\lambda + 1$ για κάθε $\lambda \in R$.

Άρα: $\lambda = x - 1 = \dfrac{y-1}{3}$ για κάθε $\lambda \in R$.

Άρα: $3x - 3 = y - 1 \Leftrightarrow \boxed{3x - y - 2 = 0}$: η εξίσωση της ευθείας γ_1. Η εξίσωση της ευθείας γ_2 είναι:

$$y - 2 = \frac{5}{-10}(x+3) \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \boxed{x + 2y - 1 = 0}$$

ii) Το στάδιο της Άρσης Βαρών θα συνδεθεί με τη γραμμή γ_2 αφού είναι πλησιέστερα από τη γ_1. Πράγματι:

$$d(0,\gamma_2) = \frac{|-1|}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} < d(0,\gamma_1) = \frac{|-2|}{\sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{5}} < \frac{2}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \sqrt{10} < 2\sqrt{5} \Leftrightarrow 10 < 20\right).$$

iii) Πρέπει: $d(B,\gamma_1) = \rho$.

Άρα: $\rho = \dfrac{|3+2-1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{4}{\sqrt{5}}$

Άρα: η εξίσωση του κύκλου θα είναι:

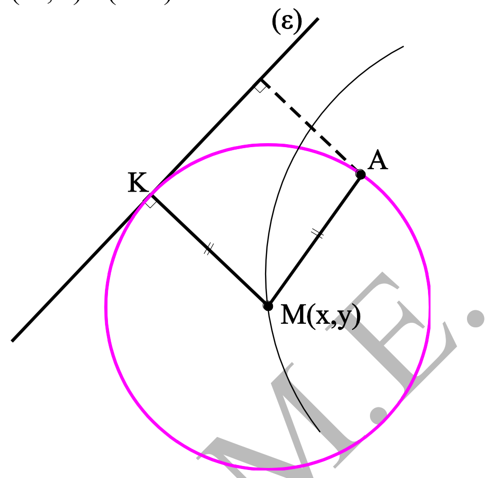
$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = \frac{16}{5}$$

Άσκηση 6η

Δίνεται μια ευθεία (ε) και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Να βρεθεί ο γ.τ. των κέντρων των κύκλων που εφάπτονται στην (ε) και περνούν από το Α.

Λύση

Έστω M(x, y) τυχαίο σημείο του ζητούμενου γ.τ. Επειδή το σημείο Μ είναι κέντρο του κύκλου που εφάπτεται στην (ε) και διέρχεται από το Α, Θα ισχύει: d(M, ε)= (MA)



Άρα: Το Μ κινείται στην παραβολή με εστία το Α και διευθετούσα την ευθεία ε.

Άσκηση 7η

Θεωρούμε το σύνολο των σημείων Μ του επιπέδου των οποίων οι συντεταγμένες (x, y) επαληθεύουν την ισότητα: $\dfrac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1$

Να βρεθεί η γραμμή (σχήμα) που σχηματίζουν τα σημεία αυτά στο επίπεδο. Να προσδιορίσετε κορυφές, εστίες, ασύμπτωτες κ.λπ. σε κάθε σχήμα που θα βρείτε. Ομοίως για την ισότητα: $x^4 - (y^2 - 9)^2 = 0$.

Λύση

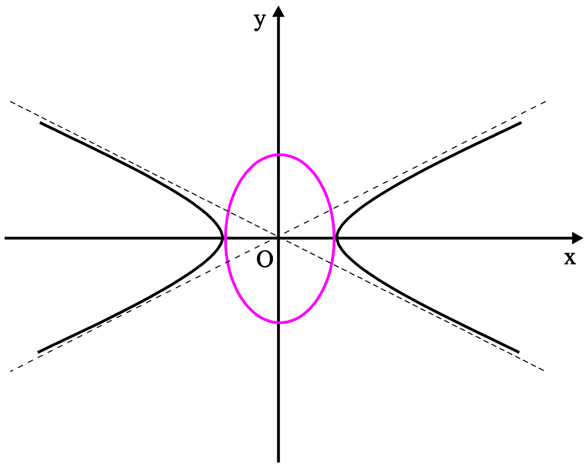
$$\frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1 \Leftrightarrow \left(\frac{y^2}{4}\right)^2 = \left(x^2 - 1\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left[\frac{y^2}{4} - \left(x^2-1\right)\right] \cdot \left[\frac{y^2}{4} + \left(x^2-1\right)\right] = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{4} - x^2 + 1 = 0 \quad \text{ή} \quad \frac{y^2}{4} + x^2 - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x^2 - \frac{y^2}{4} = 1}^{(1)} \quad \text{ή} \quad \boxed{x^2 + \frac{y^2}{4} = 1}^{(2)}$$

Η (1) παριστάνει υπερβολή με ασύμπτωτες τις ευθείες y = 2x και y = 2x, εστίες τα σημεία $\left(\sqrt{5},0\right), \left(\sqrt{5},0\right)$ και κορυφές τα σημεία (–1, 0) και (1, 0).



Η (2) παριστάνει έλλειψη με εστίες τα σημεία $\left(0,-\sqrt{3}\right)$ και $\left(0,\sqrt{3}\right)$ και κορυφές τα σημεία (0, –2) και (0,2) και επίσης τα σημεία (–1, 0) και (1, 0), άκρα του μεγάλου και μικρού άξονά της αντίστοιχα.

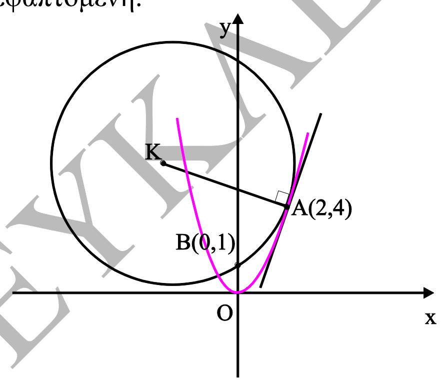
Για την ισότητα: $x^4-(y^2-9)^2=0$ εργαστείτε μόνοι σας όπως παραπάνω σαν άσκηση!

Άσκηση 8η

Βρείτε το κέντρο του κύκλου που διέρχεται από το σημείο B(0, 1) και εφάπτεται στην παραβολή $y = x^2$ στο A(2, 4).

Λύση

Προσοχή: Δυο κωνικές τομές εφάπτονται μεταξύ τους σε ένα σημείο όταν έχουν στο σημείο αυτό κοινό εφαπτόμενη.



- Το κέντρο, έστω K (x, y) του κύκλου θα βρίσκεται στη μεσοκάθετο του AB (όπου A(2, 4) και B(0, 1)). **Άρα:** Θα επαληθεύει την εξίσωσή της που είναι

$$y=-\frac{2}{3}x+\frac{19}{6}\Leftrightarrow 6y=-4x+19$$
$$\Leftrightarrow \boxed{4x+6y-19=0}$$

- Το κέντρο του κύκλου θα βρίσκεται επίσης και στην κάθετο στο σημείο A της κοινής εφαπτόμενης παραβολής και κύκλου. Η εφαπτόμενη της παραβολής στο A είναι:.

$$x\cdot 2=\frac{1}{2}(y+4)\Leftrightarrow 4x=y+4\Leftrightarrow 4x-y-4=0$$

Η κάθετη σ’ αυτήν στο A θα έχει εξίσωση:

$$y-4=-\frac{1}{4}(x-2)\Leftrightarrow \boxed{x+4y-18=0} \qquad (2)$$

Επιλύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1) και (2) προσδιορίζουμε τις συντεταγμένες του κέντρου K του κύκλου.

$$\begin{cases}4x+6y-19=0\\ x+4y-18=0\end{cases}\ldots\Leftrightarrow x=-\frac{16}{5},\ y=\frac{53}{10}$$

Άρα: Το κέντρο του κύκλου είναι το σημείο $K\left(-\frac{16}{5},\frac{53}{10}\right)$.

Άσκηση 9η

Να δείξετε ότι ο αριθμός $7^\nu – 6\nu – 1$ είναι πολλαπλάσιο του 36 για κάθε φυσικό αριθμό ν με $\nu\geq2$.

Λύση

Έστω $\alpha = 7^\nu – 6\nu – 1$ με $\nu\in N$ και $\nu \geq 2$.

- Για ν = 2 είναι $\alpha = 7^2 – 6\cdot2 – 1 = 49 – 12 – 1 = 36 =$ πολ36.
- Έστω ότι και για $\nu\in N$ και ν > 2 είναι α = πολ.36 ⇔ $7^\nu – 6\nu – 1 = 36\lambda$ (1) με $\lambda\in N^*$ θα δείξουμε ότι και για ν + 1 ο α είναι πολλαπλάσιο του 36. Δηλαδή ότι: $7^{\nu+1} – 6(\nu + 1) – 1 =$ πολ. 36

Πράγματι:

Από την (1) είναι $7^\nu = 36\cdot\lambda + 6\nu + 1$ (2)

Έτσι $7^{\nu+1} – 6(\nu + 1) – 1 = 7\cdot7^\nu – 6\nu – 6 – 1 \overset{(2)}{=}$
$7(36\lambda + 6\nu +1) – 6\nu – 7 = 7\cdot36\lambda + 42\nu + 7 – 6\nu –7$
$=7\cdot36\lambda + 36\nu = 36(7\lambda + \nu) \underset{\rho\in N^*}{\overset{7\lambda+\nu=\rho}{=}} 36\cdot\rho =$ πολ.36

Από τα παραπάνω και σύμφωνα με τη μέθοδο της μαθηματικής επαγωγής για κάθε φυσικό ν με $\nu\geq2$ ο αριθμός $7^\nu – 6\nu – 1$ είναι πολλαπλάσιο του 36.

Άσκηση 10η

Η διαίρεση ενός ακεραίου α με το 37 δίνει πηλίκο π και υπόλοιπο $υ = π^3$. Να βρεθούν οι δυνατές τιμές του α.

Λύση

Έχουμε $α = 37.π + υ$ με $0 \le υ < 37$ (1). Όμως $υ = π^3$ άρα: $α = 37\cdot π + π^3$ (2) και λόγω της (1) πρέπει $0 \le π^3 < 37$ οπότε οι δυνατές τιμές του π είναι 0, 1, 2, 3 (εφόσον π ακέραιος)

Έτσι από την (2) για π = 0 είναι: α = 0, για π = 1 είναι: α = 38, για π = 2 είναι: α = 82, για π = 3 είναι: α = 138.

Άσκηση 11η

Δίνονται οι αριθμοί $α = 2κ + 3$ και $β = κ^2 + 3κ + 4$ όπου ο κ είναι ακέραιος.

i) Να δείξετε ότι ο α είναι περιττός και ο β άρτιος

ii) Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης του αριθμού 4β – 2κα με το 6

iii) Αν ο κ είναι πολλαπλάσιο του 5 τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α + β – 2 είναι πολλαπλάσιο του 5

iv) Αν ο αριθμός δ είναι ακέραιος και δ|α, δ|β να βρείτε τις θετικές τιμές που μπορεί να πάρει ο δ.

Λύση

i) Είναι: $α = 2κ + 3 = 2κ + 2 + 1 = 2(κ + 1) + 1 \underset{ρ\in Z}{\overset{κ+1=ρ}{=}} 2ρ + 1$ οπότε ο α περιττός.

- Αν κ = 2ν με ν∈Z είναι: $β = (2ν)^2 + 3\cdot 2ν + 4 = 4ν^2 + 6ν + 4 = 2(2ν^2 + 3ν + 2) \underset{ρ\in Z}{\overset{2ν^2+3ν+2=ρ}{=}} 2ρ$.
- Αν κ = 2ν + 1 με ν∈Z είναι: $β = (2ν + 1)^2 + 3(2ν + 1) + 4 = 4ν^2 + 4ν + 1 + 6ν + 3 + 4 = 4ν^2 + 10ν + 8 = 2(2ν^2 + 5ν + 4) \underset{ρ\in Z}{\overset{2ν^2+5ν+4=ρ}{=}} 2ρ$

  Δηλαδή σε κάθε περίπτωση ο β είναι άρτιος.

ii) Έχουμε: $4β – 2κα = 4(κ^2+3κ+4)–2κ(2κ + 3) = \ldots = 6(κ + 2) + 4 \underset{π\in Z}{\overset{κ+2=π}{=}} 6π + 4$ οπότε το ζητούμενο υπόλοιπο είναι: υ = 4

iii) Έστω κ=5ρ με ρ∈Z τότε:

$$α + β – 2 = (2\cdot κ + 3) + (κ^2 + 3κ + 4) – 2 =$$
$$= κ^2 + 5κ + 5 = (5ρ^2) + 5\cdot 5ρ + 5 = 25ρ^2 + 25ρ + 5 =$$
$$= 5\left(5ρ^2 + 5ρ + 1\right) \underset{λ\in Z}{\overset{5ρ^2+5ρ+1=λ}{=}} 5λ = πολ.5.$$

iv) Ο δ∈Z. Εφόσον δ|α λόγω του i) ο δ = ± 1 ή ο δ είναι περιττός.

Όμοια ο δ|β οπότε λόγω του (i) δ = ±1 ή ο δ είναι άρτιος.

Έτσι συμπεραίνουμε ότι δ = 1.