ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΓΙΑ ΤΗΝ Α΄ ΤΑΞΗ ΤΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ - ΙΣΟΤΗΤΑ ΤΡΙΓΩΝΩΝ

του Κώστα Βακαλόπουλου

Σε μια μεγάλη ομάδα ασκήσεων στη Γεωμετρία χρησιμοποιούμε τα θεωρήματα (ΚΡΙΤΗΡΙΑ) ισότητας των τριγώνων. Τα θεωρήματα αυτά γνωστά και από το Γυμνάσιο κωδικοποιούνται στις φράσεις:

- *Π–Γ–Π (πλευρά – γωνία – πλευρά),*
- *Γ–Π–Γ (γωνία – πλευρά – γωνία) και*
- *Π–Π–Π (πλευρά–πλευρά – πλευρά) ανάλογα με τις προϋποθέσεις που πρέπει να ισχύουν κάθε φορά για να είναι ίσα.*

Στην περίπτωση των ορθογωνίων τριγώνων ισχύει ότι είναι ίσα όταν έχουν:

- *Δύο ομόλογες πλευρές ίσες μια προς μια ή*
- *Μια πλευρά και την προσκείμενη σ' αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μια προς μία*

Ο τρόπος αντιμετώπισης των ασκήσεων συνίσταται:

1^{ον}) *Στον προσδιορισμό των τριγώνων που θα συγκρίνουμε.*

(Εδώ πολλές φορές φέρνουμε κατάλληλες ευθείες ώστε να σχηματιστούν τρίγωνα που να περιέχουν τα ζητούμενα στοιχεία).

2^{ον}) *Στην τεκμηρίωση των ισοτήτων που απαιτούνται για την στοιχειοθέτηση των προϋποθέσεων του κριτηρίου που χρησιμοποιούμε.*

(Στο βήμα αυτό, προσέξτε, ότι πολλές φορές χρειάζεται να συγκρίνουμε άλλα τρίγωνα προκειμένου να συμπεράνουμε ισότητες που χρειαζόμαστε στην αρχική μας σύγκριση. Συνήθως η σύγκριση αυτή, αν και η ανάγκη της δημιουργείται στη πορεία της λύσης, προηγείται στη λύση μας).

3^{ον}) *Στα συμπεράσματα που προκύπτουν από την ισότητα των τριγώνων που αποδείξαμε μεταξύ των οποίων θα υπάρχει το ζητούμενο της άσκησης.*

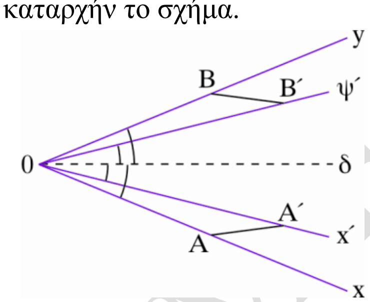
Στη συλλογή των ασκήσεων που ακολουθεί σας δίνεται η ευκαιρία από μεν τις λυμένες να δείτε τη διαδικασία που αναφέραμε από δε τις άλυτες να την εφαρμόσετε μόνοι σας.

1. Έστω γωνίες $x\widehat{O}\psi$ και $x'\widehat{O}\psi'$ με κοινή διχοτόμο Οδ. Στις πλευρές Οx και Οψ παίρνουμε σημεία Α και Β αντίστοιχα ώστε ΟΑ = ΟΒ. Επίσης στις πλευρές Οx΄ και Οψ΄ σημεία Α΄ και Β΄ ώστε ΟΑ΄ = ΟΒ΄. Δείξτε ότι: ΑΑ΄ = ΒΒ΄.

(Για αρχή μια εύκολη άσκηση!)

Λύση

Φτιάξτε καταρχήν το σχήμα.



Τα τρίγωνα που θα συγκρίνουμε είναι τα ΟΑΑ΄ και ΟΒΒ΄. Αυτά έχουν:

1) ΟΑ = ΟΒ (Από υπόθεση)

2) ΟΑ΄ = ΟΒ΄ (Από υπόθεση)

3) $A\hat{O}A' = B\hat{O}B'$

(Ως διαφορά των ίσων γωνιών $x\hat{O}\delta = \delta\hat{O}\psi$ και $x'\hat{O}\delta = \delta\hat{O}\psi'$)

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα (Π–Γ–Π).

Επομένως ΑΑ΄ = ΒΒ΄

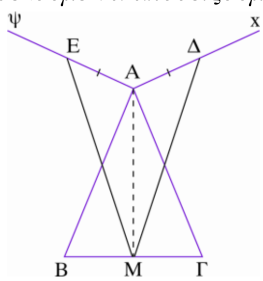
Επισήμανση:

Σε ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές υπάρχουν ίσες γωνίες και αντίστροφα απέναντι από ίσες γωνίες υπάρχουν ίσες πλευρές.

2. Δίνεται ισοσκελής τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Φέρνουμε $A x \perp A\Gamma$ και $A\psi \perp AB$ (έξω από το τρίγωνο). Παίρνουμε σημείο Δ στην Αx και Ε στην Αψ ώστε ΑΕ = ΑΔ. Να δειχθεί ότι τα Δ και Ε απέχουν εξίσου από το μέσο Μ της ΒΓ.

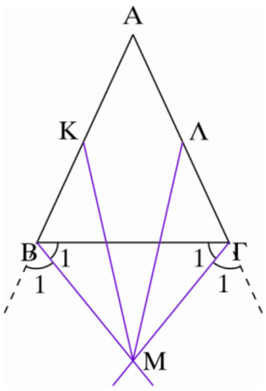
Υπόδειξη

Φέρτε την ΑΜ (... η κατάλληλη ευθεία που αναφέραμε στην εισαγωγή) ώστε να δημιουργηθούν τρίγωνα που να περιέχουν τα τμήματα που θέλουμε να αποδείξουμε ίσα.



Αξιοποιείστε τις ιδιότητες των ισοσκελών τριγώνων και εξηγείστε γιατί ισχύουν οι προϋποθέσεις ενός κριτηρίου ισότητας τριγώνων το οποίο και εφαρμόστε το.

3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Οι διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών Β και Γ τέμνονται στο Μ. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ δείξτε ότι: ΜΚ = ΜΛ.



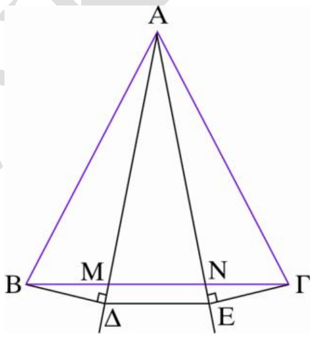
Υπόδειξη

Εδώ τα πράγματα είναι εύκολα!

Δεν χρειάζεται να φέρουμε εμείς ευθεία για να σχηματίσουμε τρίγωνα. Τα τρίγωνα είναι σχηματισμένα! Είναι τα ΚΒΜ και ΛΓΜ. Αιτιολογείστε απλά την ισχύ των προϋποθέσεων του κριτηρίου που θα χρησιμοποιήσετε.

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ. Πάνω στη πλευρά ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Μ και Ν έτσι ώστε ΒΜ = ΓΝ. Αν Δ, Ε οι προβολές των Β και Γ στις ΑΜ και ΑΝ αντίστοιχα δείξτε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.

Λύση



Θα δείξουμε ότι: ΑΔ = ΑΕ και συγκεκριμένα ότι ΑΜ = ΑΝ (1) και ΔΜ = ΕΝ (2).

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΝ. Αυτά έχουν:

α) ΑΒ = ΑΓ (αφού το ΑΒΓ είναι ισοσκελές)

β) ΒΜ = ΓΝ (από υπόθεση)

γ) $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (αφού το ΑΒΓ είναι ισοσκελές)

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΓΝ είναι ίσα (Π–Γ–Π) οπότε: ΑΜ =ΑΝ (1) και $A\hat{M}B = A\hat{N}\Gamma$.

Συγκρίνουμε στη συνέχεια τα ορθογώνια τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΝ, αυτά έχουν:

α) ΒΜ = ΓΝ (από υπόθεση)

β) $B\hat{M}\Delta = \Gamma\hat{N}E$ (ως παραπληρώματα των ίσων γωνιών $A\hat{M}B$ και $A\hat{N}\Gamma$, βλέπε προηγούμενη σύγκριση)

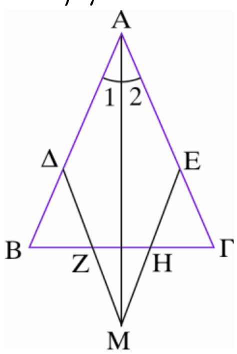
Άρα τα τρίγωνα ΒΔΜ και ΓΕΝ είναι ίσα οπότε: ΜΔ = ΝΕ (2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε: ΑΜ + ΜΔ = ΑΝ + ΝΕ ⇔ ΑΔ = ΑΕ

5. Στις ίσες πλευρές ΑΒ και ΑΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε σημεία Δ και Ε έτσι ώστε: ΑΔ = ΑΕ. Έστω Μ τυχαίο σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\widehat{A}$. Αν Ζ, Η τα σημεία στα οποία οι ΜΔ και ΜΕ τέμνουν την ΒΓ (ή τις προεκτάσεις της), να δείξετε ότι: ΒΖ=ΓΗ.

Υπόδειξη

Θα συγκρίνουμε τα τρίγωνα: ΒΔΖ και ΓΕΗ (…)



Προσέξτε όμως! Για τις γωνίες $B\hat{\Delta}Z$ και $H\hat{E}\Gamma$. Θα συγκρίνουμε πρώτα τα τρίγωνα ΑΔΜ και ΑΕΜ ώστε να προκύψουν ίσα οπότε θα έχουν τις γωνίες $A\hat{\Delta}M$ και $A\hat{E}M$ ίσες ώστε οι $B\hat{\Delta}Z$ και $H\hat{E}\Gamma$ να είναι ίσες ως παραπληρωματικές ίσων γωνιών.

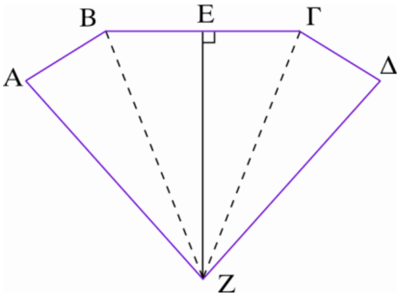
6. Έστω τεθλασμένη γραμμή ΑΒΓΔ αποτελούμενη από τρία ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ με ΑΒ = ΓΔ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Στο μέσο Ε της ΒΓ φέρνουμε κάθετη προς αυτήν και

έστω Ζ τυχαίο σημείο της. Να δείξετε ότι: ΖΑ = ΖΔ.

Λύση

Φέρνουμε τις ΒΖ και ΓΖ

Επειδή Ζ σημείο της μεσοκαθέτου της ΒΓ θα ισχύει: ΒΖ = ΓΖ, δηλαδή το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές.



Άρα: $Z\hat{B}\Gamma = Z\hat{\Gamma}B$. Όμως $\hat{B} = \hat{\Gamma}$

Άρα: $\hat{B} - Z\hat{B}\Gamma = \hat{\Gamma} - Z\hat{\Gamma}B \Leftrightarrow Z\hat{B}A = Z\hat{\Gamma}\Delta$

Συγκρίνουμε τώρα τα τρίγωνα: ΑΒΖ και ΔΓΖ, αυτά έχουν:

α) ΑΒ = ΓΔ (από υπόθεση)

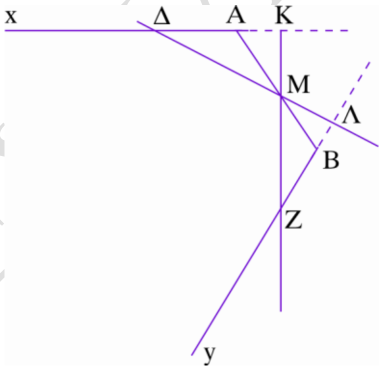
β) ΒΖ = ΓΖ (αφού Ζ σημείο της μεσοκαθέτου)

γ) $Z\hat{B}A = Z\hat{\Gamma}\Delta$ (απεδείχθη)

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΖ και ΔΓΖ είναι ίσα (Π–Γ–Π), οπότε ΖΑ = ΖΔ.

7. Κυρτή πολυγωνική γραμμή xΑΒψ έχει τις γωνίες $\hat{A}$ και $\hat{B}$ ίσες. Από το μέσο Μ της ΑΒ φέρνουμε κάθετη στην Αx που τέμνει την Βψ στο Ζ και άλλη κάθετο στην Βψ που τέμνει την Αx στο Δ. Δείξτε ότι: ΜΖ = ΜΔ.

Υπόδειξη

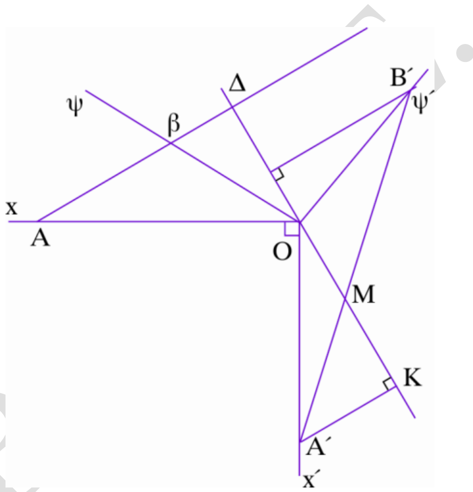


Έστω Κ και Λ τα σημεία στα οποία οι κάθετες από το Μ τέμνουν τις Αx και Βψ αντίστοιχα.

Να συγκρίνετε πρώτα τα τρίγωνα ΜΚΑ και ΜΛΒ και στη συνέχεια τα ΜΚΔ και ΜΛΖ.

8. Δίνονται δυο παραπληρωματικές γωνίες xΟψ και x΄Οψ΄ τέτοιες ώστε: $Ox \perp Ox'$ **και** $O\psi \perp O\psi'$**. Πάνω στις Οx και Οx΄ παίρνουμε αντίστοιχα σημεία Α και Α΄ ώστε ΟΑ = ΟΑ΄ και πάνω στις Οψ και Οψ΄ σημεία Β και Β΄ ώστε ΟΒ = ΟΒ΄. Δείξτε ότι η κάθετος από το Ο στην ΒΑ διχοτομεί την Β΄Α΄.**

Λύση



Έστω Δ το σημείο στο οποίο η κάθετος από το Ο τέμνει την ΒΑ και Μ το σημείο στο οποίο αυτή τέμνει την Β΄Α΄.

Για να σχηματίσουμε τρίγωνα που να περιέχουν τις πλευρές ΜΑ΄ και ΜΒ΄ που θέλουμε ν' αποδείξουμε ίσες φέρνουμε από τα Β΄ και Α΄ κάθετες στην ευθεία ΔΜ και έστω Κ και Λ τα σημεία που αυτές την τέμνουν.

Θα συγκρίνουμε τελικά τα ορθογώνια τρίγωνα ΜΛΒ΄ και ΚΜΑ΄. Πριν όμως θα «μαζέψουμε» από άλλες συγκρίσεις τις ισότητες που χρειαζόμαστε.

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΚΑ΄ και ΟΔΑ, αυτά έχουν:

α) ΟΑ = ΟΑ΄ (από υπόθεση)

β) $O\hat{A}'K = A\hat{O}\Delta$ (οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες)

Άρα τα τρίγωνα ΟΚΑ΄ και ΟΔΑ είναι ίσα οπότε:

$KA' = O\Delta$ (1)

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΟΛΒ΄ και ΟΒΔ, αυτά έχουν:

α) ΟΒ = ΟΒ΄

β) $\Lambda\hat{B}'O = B\hat{O}\Delta$ (οξείες γωνίες με πλευρές κάθετες)

Άρα τα τρίγωνα ΟΛΒ΄ και ΟΒΔ είναι ίσα οπότε: ΛΒ΄ = ΟΔ (2)
Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΚΑ΄ = ΛΒ΄.
Συγκρίνουμε τέλος τα τρίγωνα ΜΛΒ΄ και ΜΚΑ΄, αυτά έχουν:

α) ΛΒ΄ = ΚΑ΄ (απεδείχθη)

β) $\Lambda\hat{B}'M = K\hat{A}'M$ (ως συμπληρωματικές των ίσων γωνιών $\Lambda\hat{M}B'$ και $K\hat{M}A'$ που είναι ίσες ως κατακορυφήν)

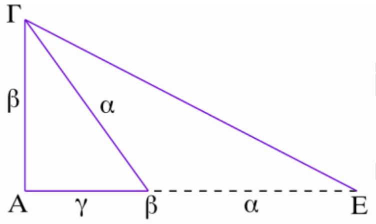
Σημείωση: *Για την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την γνωστή πρόταση από το Γυμνάσιο ότι οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου είναι συμπληρωματικές. Την πρόταση αυτή θα την αποδείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο.*

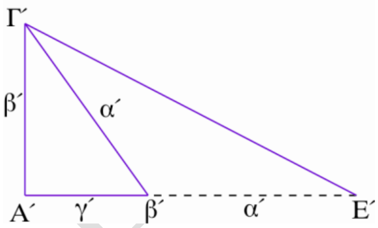
Άρα τα τρίγωνα ΜΛΒ΄ και ΜΚΑ΄ είναι ίσα, οπότε ΜΑ΄ = ΜΒ΄.

9. Δείξτε ότι, αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια από τις κάθετες πλευρές ίσες και τις περιμέτρους ίσες τότε είναι ίσα.

Λύση

Έστω δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με β = β΄ και α + β + γ = α΄ + β΄ + γ΄. Τότε θα ισχύει: α + γ = α΄ + γ΄. Προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ και Α΄Β΄ και στις προεκτάσεις τους παίρνουμε τμήματα ΒΕ = ΒΓ και Β΄Ε΄ = Β΄Γ΄.





Άρα: ΑΕ = Α΄Ε΄

Συγκρίνουμε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΓ και Α΄Ε΄Γ΄, αυτά έχουν:

α) ΑΓ = Α΄Γ΄ (από υπόθεση)

β) ΑΕ = Α΄Ε΄ (απεδείχθη)

Άρα τα τρίγωνα ΑΕΓ και Α΄Ε΄Γ΄ είναι ίσα, οπότε: $\hat{E} = \hat{E}'$ και ΓΕ = Γ΄Ε΄.

Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΓΒΕ και Γ΄Β΄Ε΄, αυτά έχουν:

α) ΓΕ = Γ΄Ε΄ (απεδείχθη)

β) $\hat{E} = \hat{E}'$ (απεδείχθη)

γ) $B\hat{\Gamma}E = B'\hat{\Gamma}'E'$ (αφού τα τρίγωνα ΒΓΕ και Β΄Γ΄Ε΄ είναι ισοσκελή και $B\hat{\Gamma}E = \hat{E}$ και $B'\hat{\Gamma}'E' = \hat{E}'$)

Άρα τα τρίγωνα ΓΒΕ και Γ΄Β΄Ε΄ είναι ίσα οπότε ΒΕ = Β΄Ε΄. Επομένως ΒΓ = Β΄Γ΄.

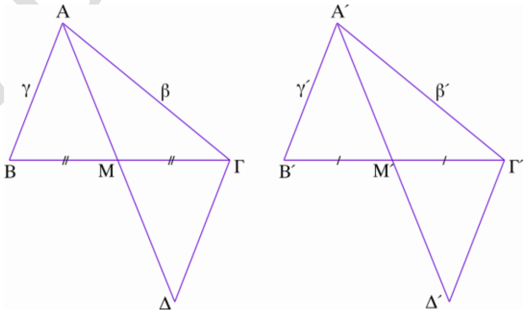
Συγκρίνουμε τέλος τα αρχικά ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄, αυτά έχουν:

α) ΑΓ = Α΄Γ΄ (από υπόθεση)

β) ΒΓ = Β΄Γ΄ (απεδείχθη)

Άρα τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.

10. Δείξτε ότι, αν δύο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές αν μία ίσες και τις μεταξύ των ίσων πλευρών περιεχόμενες διαμέσους ίσες, τότε είναι ίσα.



Υπόδειξη

Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με β = β΄, γ = γ΄ και $\mu_\alpha = \mu_\alpha'$. *Προεκτείνουμε τις διαμέσους ΑΜ*(μ_α) *και Α΄Μ΄*(μ_α) *κατά ίσα τμήματα: ΜΔ = ΑΜ και Μ΄Δ΄= Α΄Μ΄. Με διαδοχικές συγκρίσεις τριγώνων αποδείξτε ότι ΜΓ = Μ΄Γ΄ δηλαδή* $\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha'}{2} \Leftrightarrow \alpha = \alpha'$, *οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ θα είναι ίσα αφού θα έχουν και τις τρεις πλευρές τους ίσες μία προς μία.*