ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Θεωρία (Θεώρημα σελίδα 135 σχολικού βιβλίου)

Α.2 Α) ΨΕΥΔΗΣ

Β) Θα δώσουμε ένα αντιπαράδειγμα

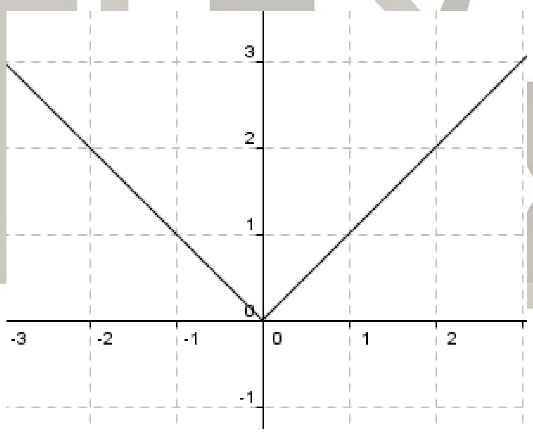
Έστω η συνάρτηση $f(x)=|x|$, $x\in\mathbb{R}$ που είναι συνεχής στο $x_0=0$ αφού είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ ως απόλυτο συνεχούς στο $\mathbb{R}$ συνάρτησης.

Όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$ αφού

Για $x<0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{-x}{x}=-1$

Για $x>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x}{x}=1$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.



Α.3 Ορισμός (Σελίδα 73 σχολικού βιβλίου)

Α.4 α) ΛΑΘΟΣ

β) ΣΩΣΤΟ, σχολικό βιβλίο σελ. 25

γ) ΛΑΘΟΣ, σχολικό βιβλίο σελ. 136

δ) ΣΩΣΤΟ, σχολικό βιβλίο σελ. 67

ε) ΣΩΣΤΟ, σχολικό βιβλίο σελ. 76

ΘΕΜΑ Β

B.1 Αν A_f, A_g και $A_{f\circ g}$ το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f, g και $f\circ g$ έχουμε:

$A_f=(0,+\infty)$ και $A_g=\mathbb{R}-\{1\}$. Οπότε: $A_{f\circ g}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=\left\{x\neq 1/\dfrac{x}{1-x}>0\right\}=$

$\{x\neq 1/0<x<1\}=\boxed{(0,1)}\neq\varnothing$. Επίσης $h(x)=(f\circ g)(x)=f(g(x))=\boxed{\ln\dfrac{x}{1-x}}$

B.2 $h'(x)=\left(\ln\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1-x}{x}\cdot\left(\dfrac{x}{1-x}\right)'=\dfrac{1-x}{x}\cdot\dfrac{1-x+x}{(1-x)^2}=\dfrac{1}{x(1-x)}>0$ στο $(0,1)$. Άρα η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1-1» στο $(0,1)$. Άρα η h αντιστρέφεται. Έστω $y=h(x)$. Έχουμε:

$y=\ln\dfrac{x}{1-x}\Leftrightarrow e^y=\dfrac{x}{1-x}\Leftrightarrow (1-x)e^y=x\Leftrightarrow e^y-xe^y=x\Leftrightarrow x\left(1+e^y\right)=e^y\Leftrightarrow x=\dfrac{e^y}{1+e^y}$ για κάθε $y\in\mathbb{R}$. Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της h είναι η: $h^{-1}(x)=\varphi(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$

B.3 $\varphi'(x)=\dfrac{e^x\left(1+e^x\right)-e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^2}=\dfrac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}>0$, $x\in\mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση φ είναι γνησίως αύξουσα και δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$.

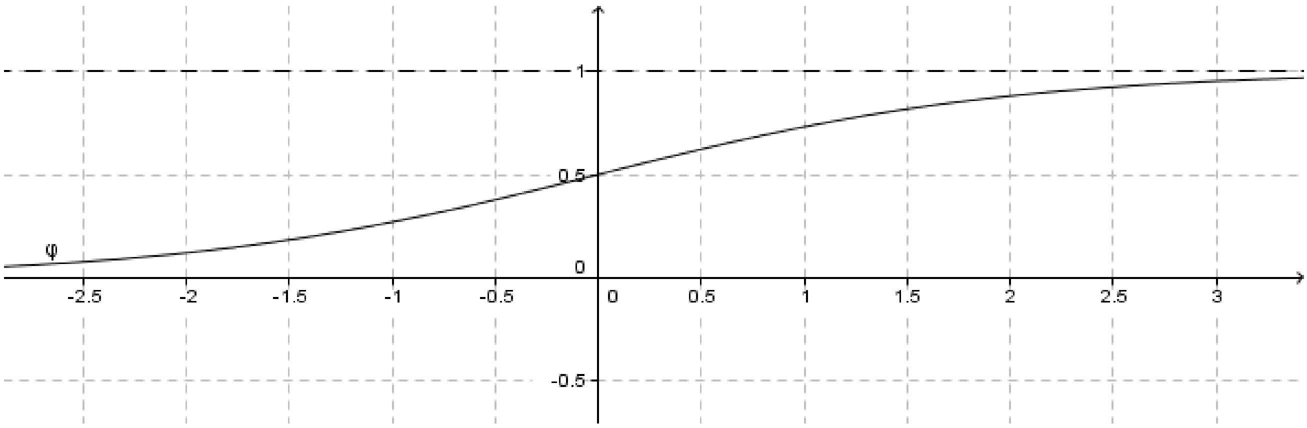
$$\varphi''(x)=\left(\frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}\right)'=\frac{e^x\left(1+e^x\right)^{\cancel{2}}-2e^x\cancel{\left(1+e^x\right)}e^x}{\left(1+e^x\right)^{\cancel{4}3}}=\frac{e^x-e^{2x}}{\left(1+e^x\right)^3}=\frac{e^x\left(1-e^x\right)}{\left(1+e^x\right)^3},\ x\in\mathbb{R}$$

- $\varphi''(x)>0\Leftrightarrow 1-e^x>0\Leftrightarrow x<0$. Άρα η συνάρτηση φ είναι κυρτή στο $(-\infty,0]$
- $\varphi''(x)<0\Leftrightarrow 1-e^x<0\Leftrightarrow x>0$. Άρα η συνάρτηση φ είναι κοίλη στο $[0,+\infty)$
- Αφού η φ είναι παραγωγίσιμη στο 0 ορίζεται η εφαπτόμενη στο $(0,\varphi(0))$. Άρα το σημείο $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ είναι σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ.

B.4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}=\dfrac{0}{1+0}=0$. Άρα η ευθεία $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της φ στο $-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{1+e^x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\left(e^x\right)'}{\left(1+e^x\right)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x}=1$. Άρα η ευθεία $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη στη γραφική παράσταση της φ στο $+\infty$.

Από όλα τα προηγούμενα συμπεράσματα προκύπτει η παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης φ:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi'(x)$	+		+
$\varphi''(x)$	+		–
φ	Η φ αύξουσα και κυρτή		Η φ φθίνουσα και κοίλη



ΘΕΜΑ Γ

Γ.1 Έστω $\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ το (ή τα) σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτόμενης ε στο Μ είναι:

$y-\left(-\eta\mu x_0\right)=-\sigma\upsilon\nu x_0\left(x-x_0\right)$ (1).

Όμως $A\in(\varepsilon)\Rightarrow -\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0=-\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2}-x_0\right)\Rightarrow -\frac{\pi}{2}+\eta\mu x_0+\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x_0-x_0\sigma\upsilon\nu x_0=0$ (2)

Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση (2) έχει ακριβώς δύο λύσεις στο $[0,\pi]$. Θεωρούμε τη συνάρτηση: $g(x)=-\frac{\pi}{2}+\eta\mu x+\frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x-x\cdot\sigma\upsilon\nu x$, $x\in[0,\pi]$. Η g είναι συνεχής στο $[0,\pi]$ (ως άθροισμα συνεχών) και παραγωγίσιμη στο $(0,\pi)$ με $g'(x)=\sigma\upsilon\nu x-\frac{\pi}{2}\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x+x\cdot\eta\mu x=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\eta\mu x$

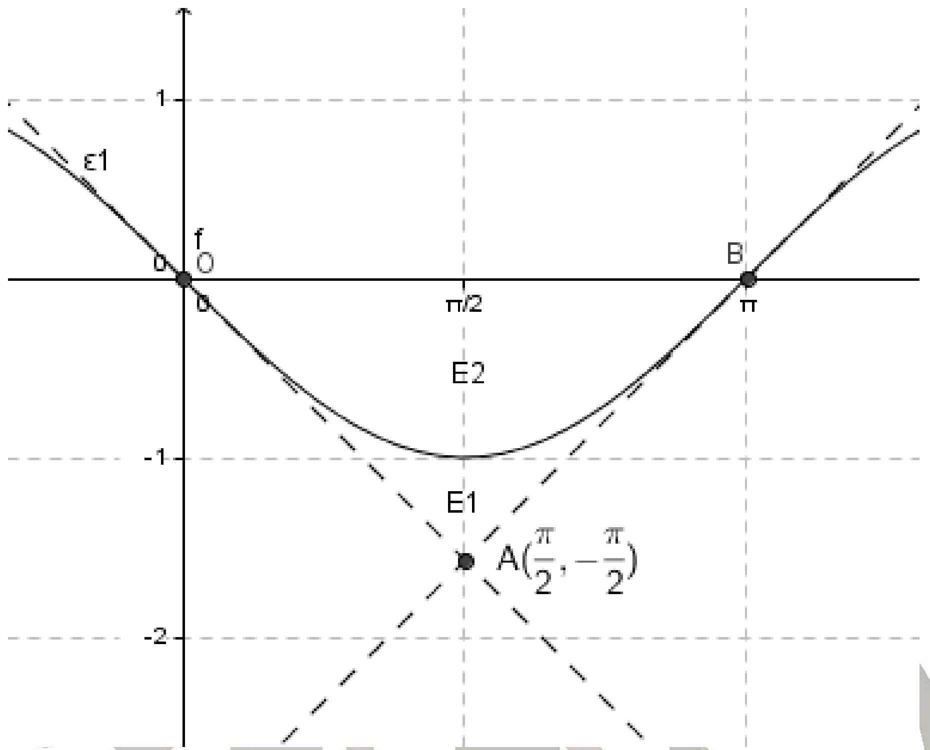
- $g'(x)>0\Leftrightarrow\frac{\pi}{2}<x<\pi$
- $g'(x)<0\Leftrightarrow 0<x<\frac{\pi}{2}$
- $g'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$g'(x)$	–	+	
$g(x)$	Η g γνησίως φθίνουσα	Η g γνησίως αύξουσα	

Άρα η συνάρτηση g παρουσιάζει ελάχιστο στο $\frac{\pi}{2}$ το $g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{2}+1<0$ και μέγιστο στα 0 και π το $g(0)=g(\pi)=0$. Η συνάρτηση g στα διαστήματα Δ_1 και Δ_2 είναι γνησίως μονότονη άρα και «1-1». Άρα οι ρίζες 0 και π είναι μοναδικές. Έτσι οι εξισώσεις των εφαπτόμενων στα σημεία $O\left(0,f(0)=0\right)$ και $B\left(\pi,f(\pi)=\pi\right)$ είναι: $\varepsilon_1: y-\left(-\eta\mu 0\right)=-\sigma\upsilon\nu 0\cdot\left(x-0\right)$ δηλαδή $\varepsilon_1: y=-x$ και $\varepsilon_1: y-\left(-\eta\mu\pi\right)=-\sigma\upsilon\nu\pi\cdot\left(x-\pi\right)$ δηλαδή $\varepsilon_2: y=x-\pi$.

Αν $\Delta_1=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ τότε $g(\Delta_1)=\left[-\frac{\pi}{2}+1,0\right]$ και αν $\Delta_2=\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$ τότε $g(\Delta_2)=\left[-\frac{\pi}{2}+1,0\right]$.

Γ.2 Η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$, αφού $f'(x)=-\sigma\upsilon\nu x$ και $f''(x)=\eta\mu x>0$ στο $(0,\pi)$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη και στο σημείο $O(0,f(0)=0)$ και στο $B(\pi,f(\pi)=0)$ δηλαδή πάνω από τις ευθείες: $\varepsilon_1: y=-x$ και $\varepsilon_2: y=x-\pi$.



Άρα: $E_2=\int_0^\pi|-\eta\mu x|dx \overset{-\eta\mu x\le 0}{=} \int_0^\pi \eta\mu x dx=[-\sigma\upsilon\nu x]_0^\pi=(-\sigma\upsilon\nu\pi+\sigma\upsilon\nu 0)=1+1=2$

και $E_1=(OAB)-\int_0^\pi|-\eta\mu x|dx=\frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\frac{\pi}{2}-2=\frac{\pi^2}{4}-2$. Άρα: $\frac{E_1}{E_2}=\frac{\frac{\pi^2}{4}-2}{2}=\frac{\pi^2}{8}-1$

Γ.3 $\lim\limits_{x\to\pi}(f(x)+x)=\lim\limits_{x\to\pi^+}(-\eta\mu x+x)=-\eta\mu\pi+\pi=\pi>0$

$\lim\limits_{x\to\pi}(f(x)-x+\pi)=\lim\limits_{x\to\pi^+}(-\eta\mu x-x+\pi)=-0-\pi+\pi=0$,

Όπως είπαμε στο ερώτημα Γ.2 η συνάρτηση f είναι κυρτή στο $[0,\pi]$. Άρα η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη στο σημείο $M(\pi,f(\pi))$ δηλαδή από την ευθεία: $y=x-\pi$, δηλαδή $f(x)\ge x-\pi \Rightarrow -\eta\mu x-x+\pi\ge 0$, στο $[0,\pi]$.

Άρα: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{1}{f(x)-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi^+}\frac{1}{-\eta\mu x-x+\pi}=+\infty$

Οπότε: $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{f(x)+x}{f(x)-x+\pi}=\lim\limits_{x\to\pi}\left(\frac{1}{f(x)-x+\pi}\cdot(f(x)+x)\right)\overset{(+\infty)\cdot\pi}{=}+\infty$

Γ.4 Στο Γ.3 αποδείξαμε ότι: $f(x) > x-\pi \Rightarrow \frac{f(x)}{x} > 1-\frac{\pi}{x}$ για κάθε $x \in [1,e] \subseteq [0,\pi]$. Άρα:

$$\int_0^{\pi}\frac{f(x)}{x}dx > \int_1^{e}\left(1-\frac{\pi}{x}\right)dx \Rightarrow \int_1^{e}\frac{f(x)}{x}dx > \left[x-\pi\ln x\right]_1^e \Rightarrow \int_1^{e}\frac{f(x)}{x}dx > e-\pi-1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 ΣΥΝΕΧΕΙΑ:

- Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ ως 3^{η} ρίζα συνεχούς συνάρτησης και
- Στο $(0,\pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.
- Ελέγχουμε την συνέχεια στο $x_0 = 0$:
  - ✓ Για $x<0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt[3]{x^4} = 0$
  - ✓ Για $x>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x\cdot \eta\mu x\right) = 0$
  - ✓ $f(0)=0$

Άρα η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=0$. Επειδή η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ ως 3^{η} ρίζα συνεχούς συνάρτησης και στο $(0,\pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων, η συνάρτηση f είναι συνεχής.

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΙΜΟΤΗΤΑ:

- Για $x\in[-1,0)$, $f'(x) = \left(\sqrt[3]{(-x)^4}\right)' = \left[(-x)^{\frac{4}{3}}\right]' = \frac{4}{3}(-x)^{\frac{4}{3}-1}(-x)' = -\frac{4}{3}(-x)^{\frac{1}{3}} = -\frac{4}{3}\sqrt[3]{(-x)}$
- Για $x\in(0,\pi]$, $f'(x) = \left(e^x\cdot\eta\mu x\right)' = e^x\cdot\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)$
- Ελέγχουμε την παραγωγισιμότητα στο $x_0=0$
  - ✓ Για $x<0$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\sqrt[3]{(-x)^4}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\frac{-x\cdot\sqrt[3]{(-x)}}{x} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(-\sqrt[3]{(-x)}\right) = 0$
  - ✓ Για $x>0$, $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x\cdot\eta\mu x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(e^x\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right) = e^0\cdot 1 = 1$

Άρα η συνάρτηση f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=0$.
Άρα το 0 είναι κρίσιμο σημείο της f. . Ελέγχουμε αν έχουμε άλλα κρίσιμα σημεία ελέγχοντας αν υπάρχουν εσωτερικά σημείο του πεδίου ορισμού στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος:

- ✓ Για $x\in[-1,0)$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow -\frac{4}{3}\sqrt[3]{(-x)} = 0 \Leftrightarrow x=0$, όμως η λύση αυτή απορρίπτεται.
- ✓ Για $x\in(0,\pi]$, $f'(x)=0 \Leftrightarrow e^x\cdot\left(\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x\right)=0 \Leftrightarrow \eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x = 0 \overset{\sigma\upsilon\nu x\neq 0}{\Leftrightarrow} \frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}+1=0 \Leftrightarrow$

  $\varepsilon\varphi x = -1 \Leftrightarrow \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\frac{3\pi}{4} \overset{x\in(0,\pi]}{\Leftrightarrow} x = \frac{3\pi}{4}$.

  Άρα το $\frac{3\pi}{4}$ είναι σημείο επίσης κρίσιμο σημείο της συνάρτησης f.

Δ.2

- Για $x\in[-1,0)$, $f'(x)=-\frac{4}{3}\sqrt[3]{(-x)}<0$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$,
- Για $x\in(0,\pi]$, επειδή $f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=e^{\frac{\pi}{2}}(1+0)=e^{\frac{\pi}{2}}>0$ και $f'\left(\frac{5\pi}{6}\right)=e^{\frac{5\pi}{6}}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)<0$ έχουμε $f'(x)>0$ στο $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$ και $f'(x)<0$ στο $\left(\frac{3\pi}{4},\pi\right)$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{3\pi}{4}\right]$ και γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4},\pi\right]$. $f'(x)>0$ στο $\left(0,\frac{3\pi}{4}\right)$

Από τα παραπάνω και από το ότι το πεδίο ορισμού είναι το κλειστό διάστημα $[-1,\pi]$ προκύπτει ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει:

- ✓ Τοπικά μέγιστα στα σημεία: -1 και $\frac{3\pi}{4}$ τα $f(-1)=1$ και $f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}$, και
- ✓ Τοπικά ελάχιστα στα σημεία: 0 και π τα $f(0)=0$ και $f(\pi)=0$

Σημείωση: Στα παραπάνω συμπεράσματα έχουμε λάβει υπ' όψιν ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $[-1,0]$.

Έτσι το σύνολο τιμών $f(A)$ της f είναι το διάστημα: $[m,M]$ όπου m και M η ελάχιστη και μέγιστη τιμή της συνάρτησης στο διάστημα: $[-1,\pi]$. Άρα $f(A)=\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$

Δ.3 Το ζητούμενο εμβαδόν είναι: $E=\int_0^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\pi}\left|e^x\cdot \eta\mu x-e^{5x}\right|dx$

Μελετάμε το πρόσημο της διαφοράς: $e^x\cdot\eta\mu x-e^{5x}=e^x\left(\eta\mu x-e^{4x}\right)$, στο $[0,\pi]$. Έχουμε: $x\ge 0\Rightarrow e^{4x}\ge 1$ και $\eta\mu x\le 1\Rightarrow -e^{4x}\le -1$ και $\eta\mu x\le 1\Rightarrow \eta\mu x-e^{4x}\le 0\Rightarrow e^x\left(\eta\mu x-e^{4x}\right)\le 0$

Άρα: $E=\int_0^{\pi}|f(x)-g(x)|dx=\int_0^{\pi}(g(x)-f(x))dx=\int_0^{\pi}\left(e^{5x}-e^x\cdot\eta\mu x\right)dx=\int_0^{\pi}e^{5x}dx-\int_0^{\pi}\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)dx$ (1)

- ✓ $\int_0^{\pi}e^{5x}dx=\left[\frac{e^{5x}}{5}\right]_0^{\pi}=\frac{e^{5\pi}}{5}-\frac{1}{5}$
- ✓ $I=\int_0^{\pi}\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)dx=\int_0^{\pi}\left(\left(e^x\right)'\cdot\eta\mu x\right)dx=\cancel{\left[e^x\cdot\eta\mu x\right]_0^{\pi}}^{\,0}-\int_0^{\pi}\left(e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)dx=-\int_0^{\pi}\left(\left(e^x\right)'\cdot\sigma\upsilon\nu x\right)dx=$ $-\left[e^x\cdot\sigma\upsilon\nu x\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}e^x(-\eta\mu x)dx=-\left(-e^{\pi}-1\right)-\int_0^{\pi}\left(e^x\cdot\eta\mu x\right)dx\Rightarrow 2I=e^{\pi}+1\Rightarrow I=\frac{e^{\pi}+1}{2}$

Έτσι η (1) γίνεται: $E=\frac{e^{5\pi}}{5}-\frac{1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}=\frac{e^{5\pi}-1}{5}-\frac{e^{\pi}+1}{2}=\frac{2e^{5\pi}-2-5e^{\pi}-5}{10}=\frac{2e^{5\pi}-5e^{\pi}-7}{10}$ τ.μ.

Δ.4 $16\cdot e^{-\frac{3\pi}{4}}\cdot f(x)-e^{-\frac{3\pi}{4}}(4x-3\pi)^2=8\sqrt{2}\Leftrightarrow 16\cdot f(x)-(4x-3\pi)^2=16\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{3\pi}{4}}\Leftrightarrow h(x)=h\left(\frac{3\pi}{4}\right)$,

όπου $h(x)=16\cdot f(x)-(4x-3\pi)^2$, $x\in[-1,\pi]$

Όμως $f(x)\le f\left(\frac{3\pi}{4}\right)\Rightarrow 16f(x)\le 16f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ και $-(4x-3\pi)^2\le 0\Rightarrow 16\cdot f(x)-(4x-3\pi)^2\le 16\cdot f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow h(x)\le h\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=\frac{3\pi}{4}$.

Άρα μοναδική λύση της αρχικής εξίσωσης η τιμή $x=\frac{3\pi}{4}$