ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

του Κώστα Βακαλόπουλου

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΕΥΡΕΣΗΣ ΜΕΓΙΣΤΗΣ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Α. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Ολοκληρώνοντας το 1^o κεφάλαιο στα Μαθηματικά της Γενικής Παιδείας της Γ΄ Λυκείου συνειδητοποιούμε ότι ο στόχος του ήταν η αντιμετώπιση προβλημάτων εύρεσης της μέγιστης ή της ελάχιστης τιμής μιας συνάρτησης (ενός μεγέθους).Επίσης και της τιμής της μεταβλητής , από την οποία εξαρτάται η συνάρτηση (το μέγεθος), για την οποία παρουσιάζει τη μέγιστη ή τη ελάχιστη τιμή αυτή.

Στα προβλήματα αυτά τα βήματα που ακολουθούμε για την επίλυσή τους είναι:

1^{ον}) *Κατασκευάζουμε τη συνάρτηση του μεγέθους που θέλουμε να μεγιστοποιήσουμε ή να ελαχιστοποιήσουμε ως προς τη μεταβλητή της οποίας η τιμή ζητείται. Αν στο πρόβλημα υπεισέρχονται και άλλες μεταβλητές εκφράζουμε αυτές ως συνάρτηση της ζητούμενης. Στο βήμα αυτό προσδιορίζουμε και το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής.*

2^{ον}) *Με τη βοήθεια των «γνώσεών» μας, αλλά κυρίως των θεωρημάτων του Διαφορικού Λογισμού προσδιορίζουμε την τιμή της μεταβλητής στην οποία η συνάρτηση παρουσιάζει την ακρότατη τιμή της καθώς και την τιμή αυτή.*

Όταν αναφέρουμε: «γνώσεις» εννοούμε αυτές που προέρχονται από τις πρώτες τάξεις του Λυκείου όπως είναι: ***η γραφική παράσταση, η μέγιστη και ελάχιστη τιμή των Τριγωνομετρικών συναρτήσεων*** *κ.α. (βλέπε παράδειγμα 1 και 2).*

Όμως υπάρχουν προβλήματα στα οποία οι γνώσεις αυτές δεν επαρκούν. Για την αντιμετώπισή τους μάθαμε το παρακάτω θεώρημα.

ΘΕΩΡΗΜΑ (Κριτήριο 1^{ης} παραγώγου).

Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο (α, β) και $x_0 \in$(α, β) με $f'(x_0)=0$.

- Αν $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β) τότε η f παρουσιάζει στο x_0 τη μέγιστη τιμή της στο (α, β)
- Αν $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β) τότε η f παρουσιάζει στο x_0 την ελάχιστη τιμή της στο (α, β)

Βάσει του παραπάνω θεωρήματος, για να προσδιορίσουμε τα ακρότατα της συνάρτησης που είναι παραγωγίσιμη στο (α, β) αρκεί:

1^{ον}. Να βρούμε τις τιμές της μεταβλητής x στις οποίες μηδενίζεται η παράγωγος της συνάρτησης, επιλύοντας την εξίσωση: $f'(x) = 0$

2^{ον}. Να προσδιορίσουμε το πρόσημο της παραγώγου συνάρτησης εκατέρωθεν του σημείου μηδενισμού, επιλύοντας τις ανισώσεις: $f'(x) > 0$ και $f'(x) < 0$.

Ανάλογα με τον τρόπο αλλαγής του πρόσημου της f΄ εκατέρωθεν των σημείων μηδενισμού χαρακτηρίζουμε τα ακρότατα μέγιστα ή ελάχιστα στο (α, β).

π.χ. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης και να προσδιοριστεί το είδος τους:

$$f(x) = 2x^2 + 15x^2 + 36x - 2008,\ x \in \mathbb{R}$$

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$f'(x) = 6x^2 - 30x + 36 = 6(x^2 - 5x + 6),\ \ x \in \mathbb{R}$

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 3$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 > 0 \Leftrightarrow x < 2$ ή $x > 3$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 < 0 \Leftrightarrow 2 < x < 3$

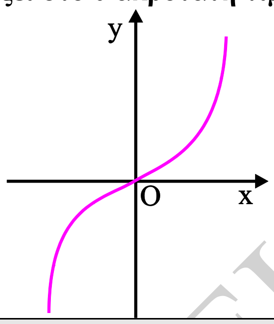
x	$-\infty$	2		3	$+\infty$
f΄(x)	+	○	−	○	+
f	↗	τ.μ.	↘	τ.ε.	↗

Άρα η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο τοπικό στο 2 το f(2) = – 1950 και ελάχιστο (τοπικό) στο 3 το f(3) = – 1981.

ΑΞΙΟΛΟΓΕΣ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΕΙΣ

1η Αν υπάρχει $x_0 \in (\alpha, \beta) \subseteq A_f$ (A_f το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f) στο οποίο η f΄ μηδενίζεται τότε η f δεν παρουσιάζει οπωσδήποτε ακρότατη τιμή σ' αυτό.

π.χ. Για τη συνάρτηση $f(x)=x^3$, $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $f'(x) = 3x^2$, $x\in\mathbb{R}$ και $f'(0)=0$ ενώ η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει στο 0 ακρότατη τιμή.



Γενικά:

Μια παραγωγίσιμη συνάρτηση f στο R, δεν παρουσιάζει ακρότατη τιμή στο $\mathbb{R}$

- αν $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ή
- αν μηδενίζεται ίσως η f΄ σε κάποια σημεία, εκατέρωθέν τους να διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Ειδικά, για τις πολυωνυμικές συναρτήσεις 3ου βαθμού, δηλαδή για τις συναρτήσεις της μορφής: $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$, $\alpha, \beta, \gamma, \delta\in\mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$ με $f'(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ (τριώνυμο) ισχύει ότι:

Δεν παρουσιάζουν ακρότατες τιμές αν η διακρίνουσα: $\Delta = 4\beta^2 - 12\alpha\gamma$ της παραγώγου τους είναι μικρότερη ή ίση με το μηδέν».

Παραδείγματα

α) Αν $f(x) = x^3 + 4x^2 + 7x + 1$ $x\in\mathbb{R}$ τότε

$f'(x) = 3x^2 - 8x + 7$

Επειδή $\Delta = 64 - 84 = -20 < 0$ ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$

Άρα η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατες τιμές στο R.

β) Αν $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 4x - 2008$ $x\in\mathbb{R}$ τότε $f'(x) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$.

Επειδή $\Delta = 16 - 16 = 0$ ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{2\}$ ($f'(2)=0$).

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f΄(x)	+	○	+

Άρα η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατες τιμές στο R.

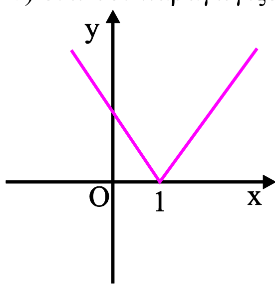
2η. Μια συνάρτηση μπορεί να παρουσιάζει ακρότατες τιμές και σε άλλα σημεία εκτός από αυτά στα οποία μηδενίζεται η παράγωγος και εκατέρωθέν τους αλλάζει πρόσημο!

Τέτοια σημεία μπορεί να είναι:

1ον. Τα σημεία στα οποία η συνάρτηση δεν παραγωγίζεται.

π.χ. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = |x-1|$, $x\in\mathbb{R}$.

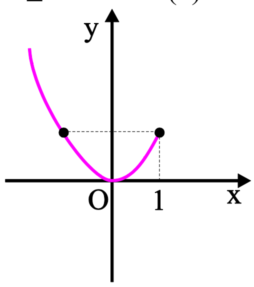
Στο $x_0 = 1$ η συνάρτηση παρουσιάζει την ελάχιστη τιμή της (f(1)=0) ενώ δεν παραγωγίζεται σ' αυτήν.



2ον. Τα άκρα του πεδίου ορισμού της

π.χ. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2$ με $x \leq 1$.

Η συνάρτηση παρουσιάζει στο 1 (τοπικό) μέγιστο ενώ $f'(x) = 2x$, $x \leq 1$ οπότε $f'(1) = 2 \neq 0$



Σημείωση:

Στα Μαθηματικά της Γενικής Παιδείας αντιμετωπίζονται συναρτήσεις που είναι παραγωγίσιμες στο πεδίου ορισμού τους, το οποίο συνήθως δεν έχει κλειστά άκρα.

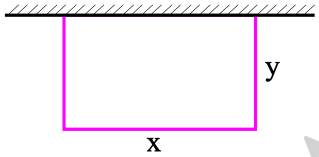
Έτσι η εύρεση των ακρότατων τιμών περιορίζεται στην εφαρμογή του θεωρήματος που προαναφέραμε.

Β. ΛΥΜΕΝΑ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

(Παρακολουθήστε τη μεθοδολογία που ακολουθούμε στην επίλυσή τους!)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Ένας ανθοπώλης σε μια ανθοκομική έκθεση πρέπει με 64μ. φράκτη (που διανέμεται στην είσοδο της έκθεσης) να φράξει ένα χώρο σχήματος ορθογώνιου, χρησιμοποιώντας ως μια πλευρά τον τοίχο της έκθεσης, για να εκθέσει τα λουλούδια του.



Προφανώς θέλει να σχηματίσει ορθογώνιο με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν. Μπορείτε να τον βοηθήσετε;

ΛΥΣΗ

Έστω x,y οι διαστάσεις του «βέλτιστου» ορθογώνιου. Το εμβαδόν του ορθογώνιου είναι: Ε(x,y)= x.y (συνάρτηση δυο μεταβλητών).

Όμως: $x+2y=64 \Leftrightarrow y=\dfrac{64-x}{2} \Leftrightarrow$

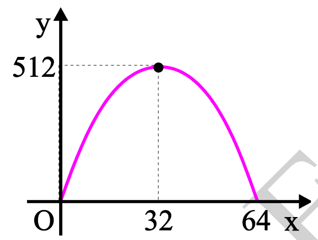
$y=32-\dfrac{x}{2}$ $(y>0 \Leftrightarrow 32-\dfrac{x}{2}>0 \Leftrightarrow x<64)$.

Άρα: $E(x)=x\left(32-\dfrac{x}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}x^2+32x$ με $0 < x < 64$.

- **Με γνώσεις Α΄ Λυκείου:**

Η συνάρτηση Ε(x) είναι τριώνυμο της μορφής: $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $\alpha=-\dfrac{1}{2}<0,\ \beta=32$ και $\gamma=0$.

Ως γνωστόν η συνάρτηση αυτή παρουσιάζει μέγιστη τιμή μόνο στο $x_0=-\dfrac{\beta}{2\alpha}=-\dfrac{32}{2\left(-\dfrac{1}{2}\right)}=32$.



Άρα: Για x = 32 ∈ (0, 64) και $y = 32-\dfrac{32}{2}=16$ το εμβαδόν γίνεται μέγιστο και ίσο με $E=-\dfrac{\Delta}{4\alpha}=512$ τ.μ.

- **Με γνώσεις Γ΄ Λυκείου:**

Για κάθε x∈(0, 64) ισχύει: $E'(x)=-x+32$

$E'(x)=0 \Leftrightarrow x=32$

$E'(x)>0 \Leftrightarrow x<32$

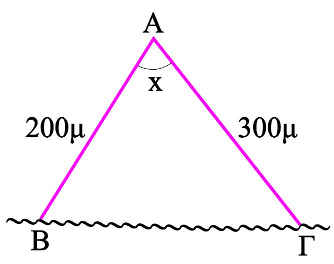
$E'(x)<0 \Leftrightarrow x>32$

x	0	32	64
Ε΄(x)	+	○	−
Ε	↗		↘

Άρα x = 32 η συνάρτηση Ε παίρνει τη μεγαλύτερή της τιμή δηλαδή το εμβαδόν γίνεται μέγιστο και ίσο με Ε(32) = 512 τ.μ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Με δυο σχοινιά μήκους 200 μ. και 300 μ. αντίστοιχα, θέλουμε να οριοθετήσουμε μια τριγωνική περιοχή σε παραλία της Ζακύνθου για την αναπαραγωγή της careta–careta. Τι είδους τρίγωνο πρέπει να σχηματίζουμε ώστε το εμβαδόν του να είναι το μέγιστο δυνατό;



ΛΥΣΗ

Αν είναι x η (ζητούμενη) γωνία $B\hat{A}\Gamma$ του τριγώνου ΑΒΓ που σχηματίζεται τότε το εμβαδόν τους δίνεται από τη συνάρτηση:

$$E(x) = \frac{1}{2}\cdot AB \cdot A\Gamma \cdot \eta\mu x = \frac{1}{2} 200\cdot 300 \cdot \eta\mu x =$$
$$= 30.000 \cdot \eta\mu x,\ 0 < x < \pi$$

- **Με γνώσεις Α΄ και Β΄ Λυκείου:**

Η συνάρτηση Ε παίρνει τη μεγαλύτερή της τιμή μόνο αν ημx = 1 (αφού: $0 < \eta\mu x \le 1$ για κάθε $x \in (0, \pi)$). Όμως $\eta\mu x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}\left(90^o\right)$.

Άρα Το τρίγωνο για να έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν πρέπει και αρκεί να είναι ορθογώνιο.

- **Με γνώσεις Γ΄ Λυκείου:**

Έχουμε: $E'(x) = 30.000\sigma\upsilon\nu x$, $0 < x < \pi$

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{\pi}{2}$
- $E'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < x < \pi$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
E΄(x)	+	o	−
E	↗		↘

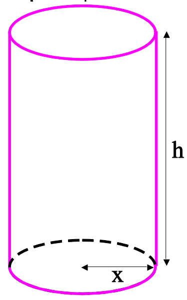
Άρα: Μόνο για $x = \frac{\pi}{2}$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή της, δηλαδή το εμβαδόν γίνεται μέγιστο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Το υπουργείο εμπορείου επιβάλλει τα «κουτάκια» με τα αναψυκτικά να έχουν χωρητικότητα 628cm^3. Να βρεθούν οι διαστάσεις τους ώστε οι βιοτεχνίες που τα κατασκευάζουν να έχουν το μικρότερο δυνατό κόστος;

ΛΥΣΗ

Έστω x η ακτίνα της βάσης και h το ύψος. Προφανώς το κόστος κατασκευής εξαρτάται από το πόσο υλικό (λαμαρίνα) χρησιμοποιούμε στην κατασκευή του. Δεδομένου ότι χρησιμοποιούμε λαμαρίνα συγκεκριμένου πάχους το κόστος εξαρτάται από τη συνολική επιφάνεια Ε του κουτιού.



Έτσι, $E(x, y) = 2\pi x^2 + 2\pi x \cdot h,\ x > 0,\ h > 0$ (συνάρτηση δυο μεταβλητών)

Όμως αν V: ο όγκος του κουτιού θα ισχύει:

$$V = 628 \Leftrightarrow 2\pi x \cdot h = 628 \Leftrightarrow h = \frac{628}{\pi x^2} \simeq \frac{200}{x^2}$$

($\pi \simeq 3{,}14$)

Άρα: $E(x) = 2\cdot 3{,}14x^2 + 2\cdot 3{,}14 \cdot x \cdot \frac{200}{x^2},\ x > 0$

(συνάρτηση μιας μεταβλητής)

(Στο παράδειγμα αυτό οι γνώσεις της Α΄ και Β΄ Λυκείου δεν επαρκούν για να βρούμε πότε η συνάρτηση αυτή παρουσιάζει ελάχιστο!)

Έχουμε: $E'(x) = \left[2\pi\left(x^2 + \frac{200}{x}\right)\right]' =$

$$= 2\pi\left(2x - \frac{200}{x^2}\right) = 4\pi\left(x - \frac{100}{x^2}\right),\ x > 0$$

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x - \frac{100}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^3 = 100 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow x = \sqrt[3]{100} \Leftrightarrow x \simeq 4{,}64\text{cm}$.
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow x - \frac{100}{x^2} > 0 \Leftrightarrow x^3 > 100 \Leftrightarrow x > 4{,}64$.
- $E'(x) < 0 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x < 4{,}64$.

x	0	4,64	+∞
E΄(x)	−	o	+
E	↘		↗

Άρα:

Το εμβαδόν (η επιφάνεια) άρα και το κόστος γίνεται ελάχιστο όταν και μόνον η ακτίνα της βάσης είναι $x \simeq 4{,}64$ και στο ύψος του κουτιού $h \simeq \frac{200}{(4{,}64)^2} \simeq 9{,}29\text{cm}$.

Γ. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να βρεθεί η ευθεία που διέρχεται από το σημείο Α(1,2) και σχηματίζει με τους ημιάξονες Οx και Οy το μικρότερο εμβαδόν.

ΛΥΣΗ

Η ζητούμενη ευθεία θα έχει εξίσωση της μορφής: $y = \lambda x + \beta$ (1), $\lambda < 0$, $\beta < 0$ (αφού $\omega > 90^o$) (η περίπτωση να μην έχει συντελεστή διεύθυνσης (//yy΄) απορρίπτεται

Επειδή διέρχεται από το Α θα ισχύει:

$$2 = \lambda + 1 \Leftrightarrow \beta = 2 - \lambda.$$

Έτσι η μορφή (1) γίνεται: $y = \lambda x + 2 - \lambda$ (2)

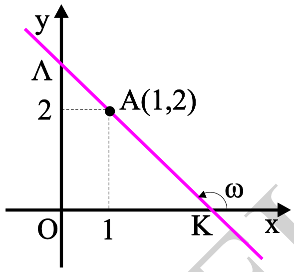
Για τα σημεία $K(x_1, 0)$ και $\Lambda(0, y_2)$ που η ευθεία ε τέμνει τους ημιάξονες ισχύει:

$$0 = \lambda \cdot x_1 + 2 - \lambda \Leftrightarrow \lambda x_1 = \lambda - 2 \Leftrightarrow x_1 = \frac{\lambda - 2}{\lambda}$$

(προφανώς $\lambda \neq 0$).

Επίσης: $y_2 = \lambda \cdot 0 + 2 - \lambda \Leftrightarrow y_2 = 2 - \lambda$

Άρα: $K\left(\frac{\lambda-2}{\lambda}, 0\right)$, $\Lambda(0, 2-\lambda)$



Το εμβαδόν του τριγώνου ΟΚΛ που σχηματίζεται δίνεται από τη συνάρτηση:

$$E(\lambda) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda - 2}{\lambda}(2 - x) \Leftrightarrow E(\lambda) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{(\lambda - 2)^2}{\lambda}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Έχουμε $E'(\lambda) = -\frac{1}{2} \cdot \frac{2(\lambda - 2)\lambda - (\lambda - 2)^2}{\lambda^2} =$

$$= -\frac{1}{2} \frac{2\lambda^2 - 4\lambda - \lambda^2 + 4\lambda - 4}{\lambda^2} = -\frac{1}{2} \frac{\lambda^2 - 4}{\lambda^2}$$

Με $\lambda < 0$ έχουμε:

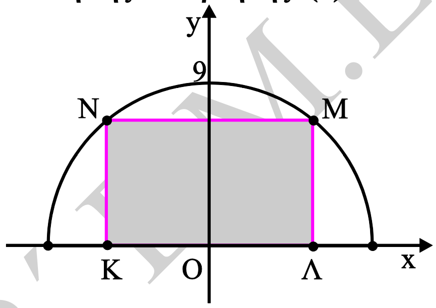
- $E'(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$
- $E'(\lambda) > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow 2 < \lambda < 0$
- $E'(\lambda) < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow \lambda < -2$

	-∞	-2	0
$E'(\lambda)$	−	○	+
E	↘	min	↗

Άρα:

Μόνο για $\lambda = -2$ η ευθεία $y = -2x + 4$, σχηματίζει με τους ημιάξονες τρίγωνο με το μικρότερο εμβαδόν.

2. Ποιες διαστάσεις πρέπει να έχει το «τελάρο» ΜΝΚΛ μιας ορθογώνιας κορνίζας ώστε να έχει τη μεγαλύτερη δυνατή επιφάνεια και οι κορυφές του Μ, Ν να ακουμπούν στο παραβολικό άνοιγμα ενώ η βάση του στο δάπεδο. (Η παραβολή του σχήματος είναι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2 + 9$).



ΛΥΣΗ

Έστω $M(x, y)$ με $y = -x^2 + 9$ η μια κορυφή του ορθογώνιου που σχηματίζεται

Άρα: $M(x, -x^2 + 9)$ με $0 < x < 3$

Η επιφάνεια της κορνίζας δηλαδή το εμβαδόν του ορθογωνίου δίνεται από τη συνάρτηση

$E(x) = 2x(-x^2 + 9) \Leftrightarrow E(x) = -2x^3 + 18x$, $0 < x < 3$

$E'(x) = -6x^2 + 18 = -6(x^2 - 3)$, $0 < x < 3$

Με $x \in (0, 3)$ έχουμε:

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{3}$
- $E'(x) < 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 > 0 \Leftrightarrow \sqrt{3} < x < 3$

	0	$\sqrt{3}$	3
E΄(x)	+	○	−
E	↗	max	↘

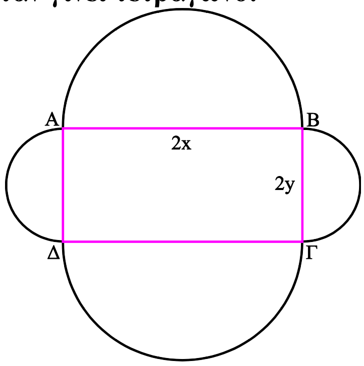
Άρα:

Τη μεγαλύτερη επιφάνεια θα έχει η κορνίζα με διαστάσεις $2\sqrt{3}$ και 6.

$(K\Lambda = 2 \cdot x = 2\sqrt{3},\ \Lambda M = -x^2 + 9 = 6)$

3. Έστω ορθογώνιο ΑΒΓΔ στις πλευρές του οποίου εφαρμόζουμε εξωτερικά ημικύκλια διαμέτρου ίση με κάθε πλευρά του. Αν η πε-

ρίμετρος του σχήματος είναι 400 μ. δείξτε ότι το ορθογώνιο αποκτά το μεγαλύτερο εμβαδόν όταν γίνει τετράγωνο!



ΛΥΣΗ

Έστω ΑΒ = 2x και ΒΓ = 2y $(x, y > 0)$

Η περίμετρος του σχήματος είναι $2\pi x + 2\pi y$

Άρα: $2\pi x + 2\pi y = 400$

$$\Leftrightarrow y = \frac{200-\pi x}{\pi} \Leftrightarrow y = \frac{200}{\pi} - x \qquad (1)$$

$$(y > 0 \Leftrightarrow 200 - \pi x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{200}{\pi})$$

- Το εμβαδόν του ορθογωνίου είναι:

$$E = 2x \cdot 2y = 4xy \overset{(1)}{=} 4x\left(\frac{200}{\pi} - x\right) = -4x^2 + \frac{800}{\pi}x,$$

$0 < x < \frac{200}{\pi}$. Άρα:

$E(x) = -4x^2 + \frac{800}{\pi}x,\ 0 < x < \frac{200}{\pi}$. Έχουμε:

$E'(x) = -8x + \frac{800}{\pi}$ με $x \in \left(0, \frac{200}{\pi}\right)$ έχουμε:

- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow -8\left(x - \frac{100}{\pi}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{100}{\pi}$
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow -8\left(x - \frac{100}{\pi}\right) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{100}{\pi}$
- $E'(x) < 0 \Leftrightarrow -8\left(x - \frac{100}{\pi}\right) < 0 \Leftrightarrow \frac{100}{\pi} < x < \frac{200}{\pi}$

	0	$\frac{100}{\pi}$	$\frac{200}{\pi}$
$E'(x)$	$+$	○	$-$
E	↗		↘

Για $x = \frac{100}{\pi}$ οπότε $y = \frac{200}{\pi} - \frac{100}{\pi} = \frac{100}{\pi}$ το ορθογώνιο γίνεται τετράγωνο και έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν του.

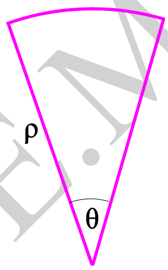
4. Θέλουμε να διαμορφώσουμε ένα θερινό θεατράκι σχήματος κυκλικού τομέα ακτίνας ρ και γωνίας θ με επιφάνεια 225τ.μ. Να βρεθεί η ακτίνα ρ ώστε η περίφραξη να στοιχίσει το λιγότερο δυνατό.

ΛΥΣΗ

- Αν Ε το εμβαδόν έχουμε:

$$E = \frac{\theta}{2\pi}\pi\rho^2 \Leftrightarrow E = \frac{\theta\rho^2}{2} \Leftrightarrow \theta = \frac{2E}{\rho^2}.$$

Για $E = 225$ έχουμε: $\theta = \frac{450}{\rho^2},\quad \rho > 0 \qquad (1)$



- Αν Π η περίμετρος τότε:

$$\Pi = 2\rho + \frac{\theta}{2\pi}2\pi\rho = 2\rho + \theta\rho \overset{(1)}{=}$$

$$= 2\rho + \frac{450}{\rho^2}\rho = 2\rho + \frac{450}{\rho},\ \rho > 0$$

Έτσι: $\Pi(\rho) = 2\rho + \frac{450}{\rho},\ \rho > 0$ είναι η συνάρτηση του δίνει την περίμετρο Π συναρτήσει της ακτίνας ρ.

Έχουμε:

$$\Pi'(\rho) = 2 - \frac{450}{\rho^2}\rho = 2\left(1 - \frac{225}{\rho^2}\right) = 2\frac{\rho^2 - 225}{\rho^2}$$

Με $\rho > 0$ έχουμε:

- $\Pi'(\rho) = 0 \Leftrightarrow \rho^2 - 225 = 0 \Leftrightarrow \rho = 15$
- $\Pi'(\rho) > 0 \Leftrightarrow \rho^2 - 225 > 0 \Leftrightarrow \rho > 15$
- $\Pi'(\rho) < 0 \Leftrightarrow \rho^2 - 225 < 0 \Leftrightarrow 0 < \rho < 15$

x	0	15	$+\infty$
$\Pi'(\rho)$	$-$	○	$+$
Π	↘		↗

Άρα:

Για να έχουμε το ελάχιστο κόστος πρέπει και αρκεί η ακτίνα να είναι 15 μέτρα.