ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

του Κώστα Βακαλόπουλου

Πρόβλημα 1:

Ρίχνουμε ένα ζάρι που δεν είναι αμερόληπτο. Ας είναι i ένα στοιχείο του συνόλου $\{1,2,3,4,5,6\}$. Συμβολίζουμε με P_i την πιθανότητα του ενδεχομένου «το αποτέλεσμα της ρίψης να είναι i».

1) **Υπολογίστε τις πιθανότητες $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ ξέροντας ότι: $P_2 = P_1$, $P_3 = 3P_1$, $P_4 = P_5 = 2P_1$, $P_6 = 2P_3$.**
2) **Υπολογίστε την πιθανότητα να φέρουμε ζυγή ένδειξη.**

Λύση:

1) Ως γνωστόν ισχύει:
$$P(\Omega)=1 \Leftrightarrow P_1+P_2+P_3+P_4+P_5+P_6=1 \Leftrightarrow$$
$$P_1+P_1+3P_1+2P_1+2P_3=1 \Leftrightarrow 9P_1+2\cdot(3P_1)=1 \Leftrightarrow$$
$$15P_1=1 \Leftrightarrow P_1=\frac{1}{15}.$$
Άρα: $P_1=P_2=\frac{1}{15}$, $P_3=\frac{3}{15}=\frac{1}{5}$, $P_4=P_5=\frac{2}{15}$, $P_6=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}$.
2) Προφανώς ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου $A=\{2,4,6\}$ οπότε:
$$P(A)=P_2+P_4+P_6=\frac{1}{15}+\frac{2}{15}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}.$$

Πρόβλημα 2:

Σύμφωνα με έρευνα της Στατιστικής υπηρεσίας το 20% των Ελληνικών οικογενειών έχουν το λιγότερο ένα σκύλο. Το 25% έχουν το λιγότερο μία γάτα και το 10% έχουν το λιγότερο ένα σκύλο και μία γάτα. Να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:

α) Μια οικογένεια (τυχαία επιλεγόμενη) να έχει το λιγότερο ένα σκύλο αλλά όχι γάτα.

β) Μια οικογένεια (τ.επ.) να έχει το λιγότερο ένα σκύλο ή το λιγότερο μία γάτα.

γ) Μια οικογένεια (τ.επ.) να μην έχει ούτε σκύλο ούτε γάτα.

δ) Μια οικογένεια (τ.επ.) να έχει ένα από τα δύο παραπάνω είδη ζώου χωρίς να έχει από το άλλο είδος.

Λύση:

Έστω

Α: το ενδεχόμενο μια οικογένεια (τυχαία επιλεγόμενη) να έχει το λιγότερο ένα σκύλο,

Β: το ενδεχόμενο μια οικογένεια (τυχαία επιλεγόμενη) να έχει το λιγότερο μία γάτα. Τότε $P(A)=0,20$, $P(B)=0,25$ ενώ $P(A\cap B)=0,10$.

α) Το ενδεχόμενο: να έχει το λιγότερο ένα σκύλο αλλά όχι γάτα είναι: Α – Β.
Άρα:
$$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0,20-0,10=0,10$$
δηλ. 10%.

β) Το ενδεχόμενο: να έχει το λιγότερο ένα σκύλο ή μία γάτα είναι: $A\cup B$.
Άρα:
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$=0,20+0,25-0,10=0,35$$ δηλ. 35%.

γ) Το ενδεχόμενο: να μην έχει ούτε σκύλο ούτε γάτα είναι: $A'\cap B'$.
Άρα
$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=$$
$$=1-0,35=0,65$$ δηλ. 65%.

δ) Το ενδεχόμενο: να έχει το λιγότερο ένα ζώο από το ένα είδος χωρίς να έχει το άλλο είδος είναι: $(A-B)\cup(B-A)$.
Όμως τα ενδεχόμενα Α – Β και Β – Α είναι ασυμβίβαστα δηλ. ξένα μεταξύ τους. Άρα:
$$P[(A-B)\cup(B-A)]=P(A-B)+P(B-A)=$$
$$P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=$$
$$=0,20+0,25-2\cdot 0,10=0,25$$ δηλ. 25%.

Πρόβλημα 3:

Έστω το σύνολο Ω των θετικών ακεραίων των μικρότερων του 301. Ποια είναι η πιθανότητα να επιλέξουμε απ' αυτούς (τυχαία) αριθμό πολλαπλάσιο του 2 ή του 3;

Λύση:

Προφανώς $N(\Omega)=300$ ενώ το Ω αποτελείται από ισοπίθανα ενδεχόμενα. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: Ο τυχαία επιλεγόμενος αριθμός να

είναι πολλαπλάσιο του 2.

Β: Ο τυχαία επιλεγόμενος αριθμός να είναι πολλαπλάσιο του 3 και

$\mathbf{A\cap B}$**:** Ο τυχαία επιλεγόμενος αριθμός να είναι πολλαπλάσιο του 2 και του 3 (δηλ. του 6).

⊠ Για τον υπολογισμό του πλήθους N(A) του συνόλου A θεωρούμε την αριθμητική πρόοδο α_ν με $\alpha_1=2$, διαφορά $\omega=2$ και γενικό όρο $\alpha_\nu=300$.

Οπότε: $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow(\nu-1)=\frac{\alpha_\nu-\alpha_1}{\omega}\Leftrightarrow\nu=\frac{\alpha_\nu-\alpha_1}{\omega}+1.$$

Άρα: $\nu=\dfrac{300-2}{2}+1=150$.

Άρα: $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{150}{300}=\dfrac{1}{2}=50\%$.

⊠ Επίσης για τον υπολογισμό του N(B) έχουμε:

$$\ldots\ \nu=\frac{\alpha_\nu-\alpha_1}{\omega}+1=\frac{300-3}{3}+1=100.$$

Άρα: $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\dfrac{100}{300}=\dfrac{1}{3}\simeq 33,3\%$.

⊠ Ενώ για τον υπολογισμό του $N(A\cap B)$ έχουμε:

$$\ldots\ \nu=\frac{\alpha_\nu-\alpha_1}{\omega}+1=\frac{300-6}{6}+1=50.$$

⊠ Άρα: $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\dfrac{50}{300}=\dfrac{1}{6}\simeq 16,6\%$.

Από τον προσθετικό νόμο των πιθανοτήτων προκύπτει ότι:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}-\frac{1}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}\simeq 66,6\%.$$

Πρόβλημα 4:

Ονομάζουμε ανεξάρτητα ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω τα ενδεχόμενα για τα οποία ισχύει:

$$\boxed{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}.$$

α) Έστω A, B δύο ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Δείξτε ότι το ίδιο συμβαίνει και για τα:
i) A και B΄, ii) A΄ και B, iii) A΄ και B΄.

β) Έστω τα δύο ενδεχόμενα:
A: ο A πετυχαίνει τον στόχο
B: ο B πετυχαίνει τον στόχο
με πιθανότητα $P(A)=\frac{4}{5}$ και $P(B)=\frac{7}{8}$ αντίστοιχα. Οι δύο τοξότες στοχεύουν ταυτόχρονα.
Υπολογίστε την πιθανότητα των παρακάτω ενδεχομένων:
i) Γ: Οι A και B πετυχαίνουν τον στόχο.
ii) Δ: Μόνο ο A πετυχαίνει τον στόχο.
iii) Ε: Ο στόχος είναι χαμένος.
iv) Ζ: Ο στόχος είναι πετυχημένος.
v) Η: Ένας μόνο τοξότης πετυχαίνει τον στόχο.

Λύση:

α) Πράγματι:

$$P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=P(A)-P(A)\cdot P(B)=$$
$$=P(A)\cdot(1-P(B))=P(A)\cdot P(B').$$
$$P(A'\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\cdots=P(B)\cdot P(A').$$
$$P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=$$
$$=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=$$
$$=1-P(A)-P(B)+P(A)P(B)$$
$$=(1-P(A))-P(B)(1-P(A))=$$
$$=(1-P(A))(1-P(B))=P(A΄)\cdot P(B΄)$$

β) Προφανώς τα A, B είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα αφού η επιτυχία της στόχευσης των δυο τοξοτών είναι ανεξάρτητη.

Γ = $\mathbf{A\cap B}$.

Άρα: $P(\Gamma)=P(A\cap B)=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{7}{8}=\dfrac{28}{40}=\dfrac{7}{10}$.

Δ = $\mathbf{A\cap B'}$.

Άρα:

$$P(\Delta)=P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=\frac{4}{5}-\frac{7}{10}=\frac{1}{10}.$$

Ε = $\mathbf{A'\cap B'}$.

Άρα:

$$P(E)=P(A'\cap B')=P(A\cup B)'=1-P(A\cup B)=$$
$$=1-(P(A)+P(B)-P(A\cap B))=$$
$$=1-\left(\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-\frac{7}{10}\right)=1-\frac{39}{40}=\frac{1}{40}.$$

Ζ = $\mathbf{A\cup B}$.

Άρα: $P(Z)=P(A\cup B)=\dfrac{39}{40}$.

Η = $\mathbf{(A'\cap B)\cup(A\cap B')}$.

Άρα:

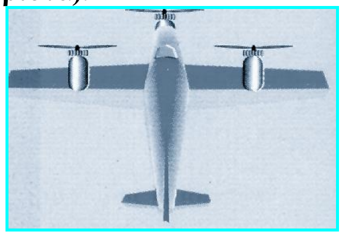
$$P(H)=P(A'\cap B)\cup P(A\cap B')\overset{(1)}{=}P(A'\cap B)+$$

$$P(A\cap B')=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=$$
$$\frac{4}{5}+\frac{7}{8}-2\frac{7}{10}=\frac{11}{40}.$$

(1) (Τα ενδεχόμενα $(A'\cap B)$, $(A\cap B')$ είναι ξένα μεταξύ τους).

Πρόβλημα 5:

Το αεροπλάνο πετάει όταν ο κεντρικός κινητήρας ή οι κινητήρες στα φτερά λειτουργούν.
Ο κεντρικός κινητήρας έχει πιθανότητα ασφάλειας $P_1=\frac{199}{200}$, οι κινητήρες στα φτερά έχουν πιθανότητα ασφάλειας ο κάθε ένας $P_2=\frac{9}{10}$ και οι κινητήρες λειτουργούν ή όχι ανεξάρτητα ο καθένας από τους άλλους (δηλ. η πιθανότητα να λειτουργούν και οι τρεις κινητήρες ισούται με το γινόμενο των πιθανοτήτων να λειτουργεί κάθε ένας χωριστά).



Ποια είναι η πιθανότητα το αεροπλάνο να πέσει;

Σημείωση:

Η ασφάλεια ενός κινητήρα είναι η πιθανότητα να λειτουργήσει.

Λύση:

Έστω Α, Β, Γ τα ενδεχόμενα λειτουργίας (ασφάλειας) των κινητήρων: Α του κεντρικού και Β, Γ του καθενός των φτερών.
Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου:

$$\Delta=\left[A\cup(B\cap\Gamma)\right]'.$$

Όμως: $P\left[A\cup(B\cap\Gamma)\right]=$

$$=P(A)+P(B\cap\Gamma)-P\left[A\cap(B\cap\Gamma)\right]=$$
$$=P(A)+P(B)\cdot P(\Gamma)-P(A)\cdot P(B)\cdot P(\Gamma)=$$
$$=\frac{199}{200}+\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}-\frac{199}{200}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{9}{10}=\frac{19981}{20000}=0,99905.$$

Άρα: $P(\Delta)=P\left[A\cup(B\cap\Gamma)\right]'=$
$$=1-P\left[A\cup(B\cap\Gamma)\right]=0,00095.$$

6. ΤΥΠΟΥ ΣΩΣΤΟΥ ΛΑΘΟΥΣ

Σ' ένα πείραμα τύχης, από μια δεσμίδα 12 χαρτιών που περιέχει 4 άσσους, 4 ντάμες και 4 ρηγάδες, τραβάμε 2 χαρτιά το ένα μετά το άλλο. ***(Στις παρακάτω προτάσεις να κυκλώσετε το Σ ή το Λ αν οι προτάσεις είναι σωστές ή λάθος αντίστοιχα)***

1) **Έχει κανείς 3 φορές περισσότερη τύχη να τραβήξει 2 ντάμες από 2 κάρτες του ίδιου είδους (δηλ. 2 άσσους ή 2 ρηγάδες ή 2 ντάμες) (Σ) Λ**

Αιτιολόγηση:

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα
Α: να τραβήξει 2 ντάμες
Β: να τραβήξει 2 ρηγάδες
Γ: να τραβήξει 2 άσσους.

Το ενδεχόμενο να τραβήξει δύο κάρτες του ίδιου είδους είναι: $A\cup B\cup\Gamma$.
Όμως τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ είναι ξένα ανά δύο.
Άρα: $P(A\cup B\cup\Gamma)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)$ ενώ $P(A)=P(B)=P(\Gamma)$.
Άρα: $P(A\cup B\cup\Gamma)=3P(A)$.

2) **Έχει κανείς 3 φορές λιγότερη τύχη να πετύχει ένα «γάμο» (ντάμα και ρήγας του ίδιου χρώματος) παρά 2 κάρτες του ίδιου χρώματος. (Σ) Λ**

Αιτιολόγηση:

Η πιθανότητα να πετύχει κανείς ένα «γάμο» είναι $\frac{4}{N(\Omega)}$ όπου N(Ω) το πλήθος των ζευγών που μπορεί να τραβήξει ($N(\Omega)=66$) ενώ η πιθανότητα να τραβήξει 2 κάρτες του ίδιου χρώματος είναι $\frac{3\cdot 4}{N(\Omega)}=\frac{12}{N(\Omega)}$ (αφού έχουμε 4 χρώματα και 3 κάρτες από τις οποίες φτιάχνονται 3 ζευγάρια ίδιου χρώματος για καθένα από τα 4 χρώματα).

Άρα: Η πιθανότητα να πετύχει «γάμο» είναι 3 φορές λιγότερη από το να πετύχει 2 κάρτες του ίδιου χρώματος.