ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

του Κώστα Βακαλόπουλου

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

Στο άρθρο αυτό θα παρουσιάσουμε μια μικρή συλλογή ασκήσεων οι οποίες καλύπτουν τις έννοιες που μάθαμε στο κεφάλαιο της Στατιστικής. Σε κάθε άσκηση αναφέρεται το κομμάτι της θεωρίας που αντιστοιχεί. Όπου χρειαστεί σχολιάζουμε…

ΑΣΚΗΣΗ 1η .
(ΣΥΧΝΟΤΗΤΕΣ – ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ)

Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 οι τιμές μια μεταβλητής Χ με σχετικές συχνότητες:

$$f_i = \frac{i^2}{5\kappa}, \quad i=1,2,3,4$$

α) Να προσδιοριστεί η τιμή του κ

β) Αν $v_4 = 64$ (απόλυτη συχνότητα) να βρείτε το μέγεθος ν του δείγματος

γ) Να χαράξετε το κυκλικό διάγραμμα της παραπάνω κατανομής.

ΛΥΣΗ

α) Ισχύει: $\boxed{\sum_{i=1}^{4} f_i = 1}$ (δηλ. $f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = 1$)

Άρα

$$\frac{1^2}{5\kappa} + \frac{2^2}{5\kappa} + \frac{3^2}{5\kappa} + \frac{4^2}{5\kappa} = 1 \Leftrightarrow \frac{1+4+9+16}{5\kappa} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5\kappa = 30 \Leftrightarrow \kappa = 6.$$

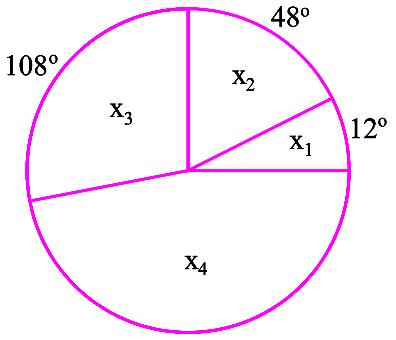
(Έτσι: $f_1 = \frac{1}{30}, f_2 = \frac{4}{30}, f_3 = \frac{9}{30}, f_4 = \frac{16}{30}$).

β) Ισχύει: $\boxed{f_i = \frac{v_i}{v}}$, $i = 1,2,3,4$ Άρα:

$$f_4 = \frac{v_4}{v} \Leftrightarrow \frac{16}{30} = \frac{64}{v} \Leftrightarrow v = \frac{30 \cdot 64}{16} \Leftrightarrow v = 120$$

γ) Ισχύει: $\alpha_i = f_i \cdot 360^\circ$, $i = 1,2,3,4$

f_i	α_i
1/30	12°
4/30	48°
9/30	108°
10/30	192°



Κυκλικό διάγραμμα κατανομής συχνοτήτων.

ΑΣΚΗΣΗ 2η
(ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ– ΠΙΝΑΚΑΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ ΣΥΧΝΟΤΗΤΩΝ– ΜΕΤΡΑ ΘΕΣΗΣ)

Το διπλανό πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων παρουσιάζει την κατανομή του αριθμού των ημερών που παρέμειναν οι ένοικοι σ' ένα ξενοδοχείο της Κέρκυρας την φετινή καλοκαιρινή σαιζόν. Να βρεθεί:

α) Η μέση τιμή των ημερών παραμονής στο ξενοδοχείο

β) Η διάμεσος των ημερών αυτών.

ΛΥΣΗ

Έστω:

x_i το κέντρο κλάσεων

v_i οι συχνότητες κάθε κλάσης και

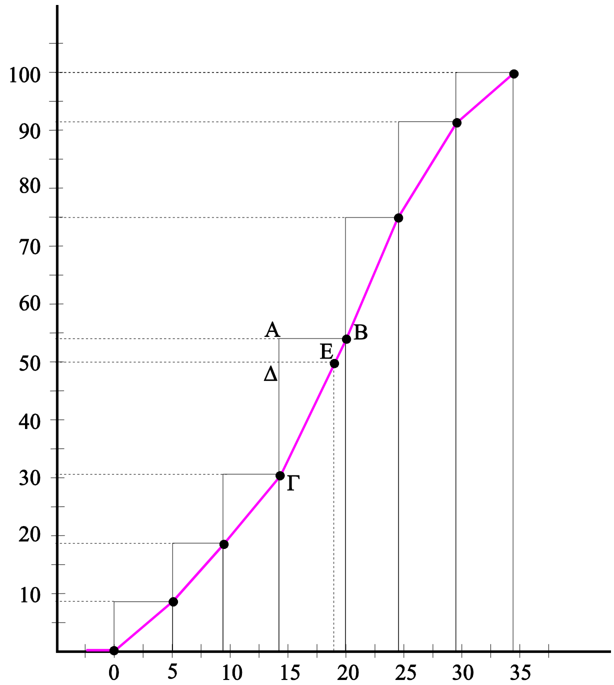
N_i οι αντίσοιχες αθροιστικές συχνότητες (i=1,2,…,7)

α) Έχουμε τον ακόλουθο πίνακα:

x_i	v_i	$x_i v_i$	N_i	F_1
2,5	9	22,5	9	*9*
7,5	10	75	9	*19*
12,5	12	150	31	*31*
17,5	23	402,5	54	*54*
22,5	21	472,5	75	*75*
27,5	17	467,5	92	*92*
32,5	8	260	100	*100*
	100	*1850*		

Άρα $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{7} x_i v_i}{\sum_{i=1}^{7} v_i} = \dfrac{1850}{100} = 18,5$

β) Κατασκευάζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.



Από τα όμοια τρίγωνα $\Gamma\overset{\Delta}{A}B \approx \Gamma\overset{\Delta}{\Delta}E$ έχουμε:

$$\frac{\Delta E}{\Gamma\Delta} = \frac{AB}{A\Gamma}$$

Άρα: $\Delta E = \dfrac{AB \cdot \Gamma\Delta}{A\Gamma} = \dfrac{5 \cdot 19}{23} \simeq 4{,}13$

17/Ο	15/Π	14/Π	19/Ο	23/Ο	21/Ο	27/Π	11/Π
19/Ο	20/Π	19/Π	17/Ο	11/Π	13/Ο	13/Π	15/Π
21/Π	19/Ο	20/Π	19/Ο	17/Π	17/Ο	18/Ο	13/Ο
19/Ο	20/Ο	21/Ο	18/Ο	17/Ο	16/Π	16/Ο	15/Ο
14/Π	19/Ο	21/Π	18/Ο	23/Ο	22/Ο	21/Π	19/Π

Άρα: Η διάμεσος είναι: δ = 15 + 4,13 ≃19,13

ΑΣΚΗΣΗ 3^{η}

(ΠΙΝΑΚΕΣ ΔΙΠΛΗΣ ΕΙΣΟΔΟΥ)

Στον παρακάτω πίνακα καταγράφεται η ηλικία και η ομάδα που υποστηρίζει (Ο: ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΣ, Π: ΠΑΝΑΘΗΝΑΪΚΟΣ) δείγμα 40 φιλάθλων από μια κερκίδα του γηπέδου.

α) Να συμπληρώσετε τον πίνακα:

	ΗΛΙΚΙΑ	
	<18 (ΑΝΗΛΙΚΟΙ)	**≥ 18 (ΕΝΗΛΙΚΟΙ)**
ΟΛΥΜΠΙΑΚΟΙ		
ΠΑΝΑΘΗΝΑΪΚΟΙ		

β) Να βρεθεί το ποσοστό επί των ανηλίκων που είναι Ολυμπιακοί

γ) Να βρεθεί το ποσοστό επί των Παναθηναϊκών που είναι ανήλικοι

δ) Να βρεθεί το ποσοστό επί των φιλάθλων που είναι ενήλικοι – Ολυμπιακοί

ΛΥΣΗ

α)

	<18	≥18
0	8	15
Π	9	8

β)

	<18
0	8
Π	9
	17

Επειδή 8:17=0,4705 το ζητούμενο ποσοστό είναι 47,05%

γ)

	<18	≥18	ΣΥΝΟΛΟ
Π	9	8	17

Επειδή 9:17=0,5294 το ζητούμενο ποσοστό είναι 52,94%

δ)

	<18	≥18	
0	8	15	25
Π	9	8	17
ΣΥΝΟΛΟ	17	23	40

Επειδή 15:40=0,375 το ζητούμενο ποσοστό είναι 37,5%

ΑΣΚΗΣΗ 4η (ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ)

Η μέση ηλικία των θαμώνων ενός INTERNET CAFÉ στο ΜΑΡΟΥΣΙ είναι 15 χρόνια. Σήμερα το πρωί ήρθε ένας ηλικιωμένος κύριος 62 χρονών και η μέση τιμή ανέβηκε στα 15,5 χρόνια. Πόσοι ήταν οι θαμώνες του café πριν έρθει ο κύριος αυτός;

ΛΥΣΗ

Αν ν ο αριθμός των θαμώνων του café πριν έρθει ο κύριος ισχύει:

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}\Leftrightarrow 15=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i}{\nu}\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{\nu}x_i=15\nu$$

Με την είσοδο του κυρίου στο café έχουμε:

$$\bar{x}'=\frac{\sum_{i=1}^{\nu}x_i+62}{\nu+1}\Leftrightarrow 15{,}5=\frac{15\cdot\nu+62}{\nu+1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 15{,}5(\nu+1)=15\cdot\nu+62\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}5\cdot\nu=46{,}5\Leftrightarrow \nu=93$$

ΑΣΚΗΣΗ 5η (ΜΕΣΗ ΤΙΜΗ– ΔΙΑΚΥΜΑΝΣΗ)

Η μέση τιμή και η διακύμανση τριών αριθμών είναι 15 και $\frac{50}{3}$ αντίστοιχα. Αν προστεθούν δυο ακόμα αριθμοί η μέση τιμή και η διακύμανση γίνονται 20 και 50 αντίστοιχα. Να βρεθούν οι δυο νέοι αριθμοί.

ΛΥΣΗ

Έστω x_1, x_2, x_3 οι τρεις πρώτοι αριθμοί και $x_4 = x$, $x_5 = y$ οι δυο νέοι.

Θα ισχύει:

$$\frac{x_1+x_2+x_3}{3}=15\Leftrightarrow x_1+x_2+x_3=45 \qquad (1)$$

Επίσης:

$$\frac{1}{3}\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)-15^2=\frac{50}{3}\Leftrightarrow x_1^2+x_2^2+x_3^2=725 \quad (2)$$

(Θυμίζουμε ότι η διακύμανση:

$$\boxed{s^2=\frac{\sum\left(x_i-\bar{x}\right)^2}{\nu}=\frac{1}{\nu}\sum x_i^2-\bar{x}^2}$$

Επίσης:

$$\frac{(x_1+x_2+x_3)+x+y}{5}=20\overset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{45+x+y}{5}=20\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x+y=55 \qquad (3)$$

Ενώ:

$$\frac{1}{5}\left[\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)+x^2+y^2\right]-20^2=50$$

$$\overset{(2)}{\Leftrightarrow}725+x^2+y^2=250+2000$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2=1525 \quad (4)$$

Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων (3) και (4)

$$\begin{cases}x+y=55\\x^2+y^2=1525\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=55\\(x+y)^2-2xy=1525\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x+y=55\\xy=750\end{cases}\Leftrightarrow (x+y)=(25,30) \text{ ή } (30,25).$$

Άρα:

Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι: 25, 30.

ΑΣΚΗΣΗ 6η («ΤΥΠΟΠΟΙΗΣΗ ΤΙΜΩΝ»)

Έστω x_1, x_2, x_3, …, x_κ κ αριθμοί με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση s_x. Αν από κάθε αριθμό αφαιρέσουμε την μέση τιμή $(\bar{x})$ και το αποτέλεσμα το διαιρέσουμε με την τυπική απόκλιση (s_x) θα προκύψουν κ νέοι αριθμοί με μέση τιμή 0 και τυπική απόκλιση 1.

ΛΥΣΗ

Έστω y_1, y_2, y_3, …, y_κ οι κ νέοι αριθμοί με μέση τιμή $\bar{y}$ και τυπική απόκλιση: s_y

Θα ισχύει: $\boxed{y_i=\frac{x_i-\bar{x}}{s_x}}$, i=1,2,…,κ

- $$\frac{y_1+y_2+\ldots+y_\kappa}{\kappa}=\frac{1}{\kappa}\left(\frac{x_1-\bar{x}}{s_x}+\frac{x_2-\bar{x}}{s_x}+\ldots+\frac{x_\kappa-\bar{x}}{s_x}\right)$$

$$=\frac{1}{\kappa\cdot s_x}\left[\left(x_1+x_2+\ldots+x_\kappa\right)-\kappa\cdot\bar{x}\right]$$

$$=\frac{1}{\kappa\cdot s_x}\left[\kappa\cdot\bar{x}-\kappa\cdot\bar{x}\right]=0 \text{ Άρα: } \boxed{\bar{y}=0}.$$

(Υπόψιν:

$$\bar{x}=\frac{x_1+x_2+\ldots+x_\kappa}{k}\Leftrightarrow x_1+x_2+\ldots+x_\kappa=\kappa\cdot\bar{x}).$$

- $$\frac{\left(y_1-\bar{y}\right)^2+\left(y_2-\bar{y}\right)^2+\ldots+\left(y_\kappa-\bar{y}\right)^2}{\kappa}=$$

$$=\frac{1}{\kappa}\left(y_1^2+y_2^2+\ldots+y_\kappa^2\right)=$$

$$=\frac{1}{\kappa}\left[\left(\frac{x_1-\bar{x}}{s_x}\right)^2+\left(\frac{x_2-\bar{x}}{s_x}\right)^2+\ldots+\left(\frac{x_\kappa-\bar{x}}{s_x}\right)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{s_x^2}\frac{\left(x_1-\bar{x}\right)^2+\left(x_2-\bar{x}\right)^2+\ldots+\left(x_\kappa-\bar{x}\right)^2}{\kappa}=\frac{1}{s_x^2}\cdot s_x^2=1$$

Άρα: $s_y^2=1$ οπότε: $\boxed{s_y=1}$.

Σχόλιο:

Την 6η άσκηση μπορούμε να λύσουμε και εφαρμόζοντας τα συμπεράσματα της 1ης εφαρμογής σελ. 99 του σχολικού βιβλίου.

Σύμφωνα με αυτή αν $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$, οι τιμές μιας μεταβλητής Χ με μέση τιμή $\bar{x}$ και τυπική απόκλιση: s_x και:

- $y_i = c\cdot x_i$, $(c\in\mathbb{R})$, $i = 1,2\ldots,\kappa$ οι τιμές μιας μεταβλητής Υ με μέση τιμή: $\bar{y}$ και τυπική απόκλιση: s_y τότε: $\bar{y}=c\cdot\bar{x}$ και $S_y = |c|\cdot S_x$ (1) ή
- $y_i = x_i + c$, $(c\in\mathbb{R})$, $i=1.2\ldots,\kappa$ οι τιμές μιας μεταβλητής Υ με μέση τιμή $\bar{y}$ και τυπική απόκλιση: s_y τότε: $\bar{y}=\bar{x}+c$ και $s_y = s_x$ (2)

Έτσι για την άσκηση 6 έχουμε:

$$y_i=\frac{x_i-\bar{x}}{s_x}=\frac{1}{s_x}\cdot x_i-\frac{\bar{x}}{s_x},\ i=1,2,3,\ldots,\kappa$$

Θεωρούμε: $\omega_i=\frac{1}{s_x}x_i$, $i=1,2,3,\ \ldots,\ \kappa$ αριθμούς με μέση τιμή $\bar{\omega}$ και τυπική απόκλιση: S_ω

Σύμφωνα με τους τύπους (1) θα ισχύει:

$$\bar{\omega}_i=\frac{1}{s_x}\cdot\bar{x}=\frac{\bar{x}}{s_x}\ \text{και}\ s_\omega=\left|\frac{1}{s_x}\right|\cdot s_x=\frac{s_x}{s_x}=1.$$

Και: $y_i=\omega_i-\frac{\bar{x}}{s_x}$, $i=1,2,3,\ \ldots,\ \kappa$ αριθμούς με μέση τιμή $\bar{y}$ και τυπική απόκλιση: s_ω

Σύμφωνα με τους τύπους (2) θα ισχύει:

$$\bar{y}=\bar{\omega}-\frac{\bar{x}}{s_x}=\frac{\bar{x}}{s_x}-\frac{\bar{x}}{s_x}=0\ \text{και}\ s_y=s_\omega=1.$$

Πριν συνεχίσουμε στην άσκηση 7 θα κάνουμε ένα ακόμα σχόλιο:

Όταν σε μια κατανομή συχνοτήτων συμβαίνει μεταβολή στις συχνότητες (ν_i) των τιμών της (x_i), $i=1.2\ldots,\kappa$ τότε επέρχεται αντίστοιχη μεταβολή και στον πληθυσμό του δείγματος.

π.χ. Αν αυξήσουμε τις συχνότητες κατά μ τότε ο νέος πληθυσμός (ν΄) θα είναι:

$$\boxed{\nu'=\sum_{i=1}^{\kappa}\left(\nu_i+\mu\right)=\sum_{i=1}^{\kappa}\nu_i+\sum_{i=1}^{\kappa}\mu=\nu+\kappa\mu}$$

ΑΣΚΗΣΗ 7η

Έστω x_i, i=1,2…, 10 οι 10 τιμές μιας μεταβλητής Χ σ' ένα δείγμα μεγέθους $\nu = 50$ με $x_i = i$, i =1,2…, 10, ν_i, i=1.2…, 10 οι αντίστοιχες συχνότητές τους και $\bar{x}=11{,}8$ η μέση τιμή τους.

Αν όλες οι συχνότητες αυξηθούν κατά 2 να υπολογίσετε τη νέα μέση τιμή των τιμών αυτών.

ΛΥΣΗ

Ο πληθυσμός θα γίνει:

$$\nu'=\sum_{i=1}^{10}\left(\nu_i+2\right)=\sum_{i=1}^{10}\nu_i+\sum_{i=1}^{10}2=\nu+10\cdot2=50+20=70$$

Η νέα μέση τιμή $\bar{x}'$ είναι:

$$\bar{x}'=\frac{1}{70}\sum_{i=1}^{10}x_i\left(\nu_i+2\right)=\frac{1}{70}\left(\sum_{i=1}^{10}x_i\nu_i+2\sum_{i=1}^{10}x_i\right)\quad(1)$$

Όμως: Αν $\bar{x}$ η αρχική μέση τιμή, τότε:

$$\bar{x}'=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i\nu_i}{\nu}\ \text{άρα}$$

$$11{,}8=\frac{\sum_{i=1}^{10}x_i\nu_i}{50}\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{10}x_i\nu_i=590\ \text{και}$$

$$\sum_{i=1}^{10}x_i=x_1+x_2+x_3+\ldots+x_{10}=1+2+3+\ldots+10=$$

$$=\frac{1}{2}10\left(1+10\right)=55$$

(Θυμηθείτε το άθροισμα των ν πρώτων όρων αριθμητικής προόδου: $\sum\nu=\frac{1}{2}\nu\left(\alpha_1+\alpha_\nu\right)$)

Έτσι έχουμε:

$$\bar{x}'=\frac{1}{70}\left(590+2\cdot55\right)=\frac{700}{70}=10$$

ΑΣΚΗΣΗ 8η
(ΣΥΝΤΕΛΕΣΗΣ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ – ΟΜΟΙΟΓΕΝΕΙΑ)

Στα δυο τμήματα της Γ΄ Τάξης ενός επαρχιακού σχολείου στο διαγώνισμα στο μάθημα της Στατιστικής η βαθμολογία έχει κατανομή περίπου κανονική.

Στο 1^o τμήμα το 50% των μαθητών έχει βαθμολογία πάνω από 12 ενώ το 49,85% από αυτούς έχει βαθμολογία μέχρι 18.

Στο 2^o τμήμα το 16% των μαθητών έχει βαθμολογία μέχρι 10 ενώ από 10 μέχρι 19 έχει το 81,5% των μαθητών.

Μπορείτε να συγκρίνετε τα δυο τμήματα ως προς την ομοιογένειά τους.

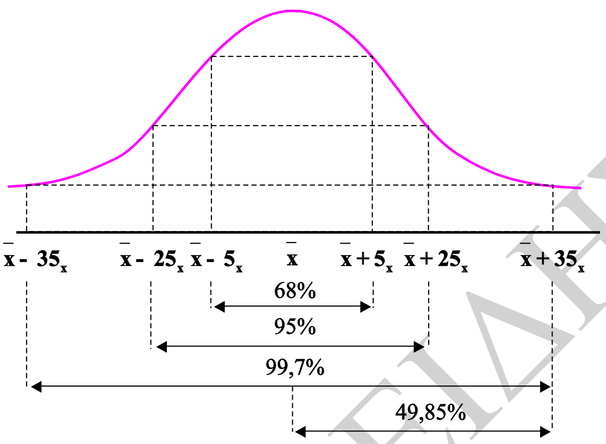
ΛΥΣΗ

(1^o τμήμα)

Έστω S_x η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της κατανομής της βαθμολογίας του τμήματος.

Από τα δεδομένα προκύπτουν:

$$\begin{cases} \bar{x} = 12 \\ \bar{x} + 3s_x = 18 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} = 12 \\ s_x = 2 \end{cases}$$

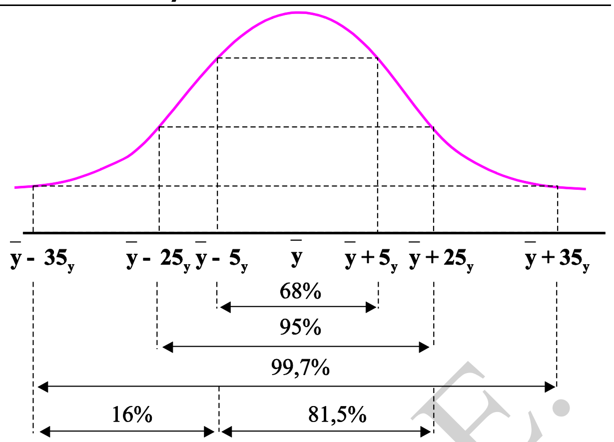


Άρα: $CV_1 = \dfrac{2}{12} \simeq 0,166$ δηλ. 16.6%.

Έστω $\bar{x}$, s_x η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της κατανομής της βαθμολογίας του τμήματος.

(2^o τμήμα)

Έστω $\bar{y}$, s_y η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της κατανομής της βαθμολογίας του τμήματος.



Έστω $\bar{y}$, s_y η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση της κατανομής της βαθμολογίας του τμήματος.

Από τα δεδομένα προκύπτουν:

$$\begin{cases} \bar{y} - s_y = 10 \\ \left(\bar{y} + 2s_y\right) - \left(\bar{y} - s_y\right) = 19 - 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{y} = 13 \\ s_y = 3 \end{cases}$$

Άρα: $CV_2 = \dfrac{3}{13} \simeq 0,2307$ δηλ. 23,07%.

Άρα: Το 1^o τμήμα παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια.