Μαθηματικά

για την Β΄ τάξη του Λυκείου

ΑΛΓΕΒΡΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

των Κώστα Βακαλόπουλου – Βασίλη Καρκάνη

Εισαγωγικό σημείωμα

Παραθέτουμε στα δύο άρθρα που ακολουθούν μια σειρά από λυμένες ασκήσεις στα κεφάλαια των Προόδων και της Εκθετικής και Λογαριθμικής Συνάρτησης για έλεγχο των γνώσεων και εμπέδωση της ύλης.

Προσέξτε στο τέλος κάθε άρθρου τα προβλήματα που παραθέτονται και δείτε την εφαρμογή των παραπάνω εννοιών στην καθημερινή ζωή.

Α Πρόοδοι

Λυμένες Ασκήσεις

1. **α) Το άθροισμα των 15 πρώτων όρων αριθμητικής προόδου α_ν με νιοστό όρο $\alpha_\nu = 5\nu + 2$ είναι:**
i) 610 ii) 620 iii) 630 iv) 640 v) 650
Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

β) Να βρεθούν οι τιμές του πραγματικού αριθμού x ώστε οι αριθμοί: συν2x, $\sigma\upsilon\nu^2 x$, $\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.

γ) Δίνεται η γεωμετρική πρόοδος 1, 5, 25, 125, 625. Δείξτε ότι οι διαφορές μεταξύ δύο διαδοχικών όρων σχηματίζουν μια νέα γεωμετρική πρόοδο. Να εξετάσετε αν η προηγούμενη ιδιότητα ισχύει γενικά.

Λύση

α) Σωστή απάντηση είναι η (iii) γιατί έχουμε: $\alpha_1 = 5\cdot 1 + 2 = 7$,

$\omega = \alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 5(\nu+1) + 2 - 5\nu - 2 = 5$ οπότε

$$S_{15} = \frac{15}{2}\left[2\cdot 7 + 14\cdot 5\right] = 15\cdot 42 = 630$$

β) Θα πρέπει να ισχύει:

$$2\sigma\upsilon\nu^2 x = \sigma\upsilon\nu 2x + \eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu^2 x = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 1 + \sigma\upsilon\nu x \Leftrightarrow$$

$\sigma\upsilon\nu x = 1 \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi,\ \ \kappa\in\mathbb{Z}$ οι ζητούμενοι αριθμοί.

γ) Οι διαφορές των διαδοχικών όρων της γεωμετρικής προόδου που δόθηκε σχηματίζουν την ακολουθία: 4, 20, 100, 500, ... που προφανώς είναι γεωμετρική πρόοδος με $1^{\text{ο}}$ όρο $\alpha_1 = 4$ και λόγο το $\lambda = 5$.

Γενικά αν έχουμε τη γεωμετρική πρόοδο: α_1, $\alpha_1\cdot\lambda$, $\alpha_1\cdot\lambda^2$, $\alpha_1\cdot\lambda^3$,... με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ τότε οι διαφορές των διαδοχικών όρων της σχηματίζουν την ακολουθία:

$\alpha_1\lambda - \alpha_1,\ \ \alpha_1\lambda^2 - \alpha_1\lambda,\ \ \alpha_1\lambda^3 - \alpha_1\lambda^2, \ldots$ ή

$\alpha_1(\lambda-1),\ \alpha_1\lambda(\lambda-1),\ \alpha_1\lambda^2(\lambda-1),\ldots$

που προφανώς είναι γεωμετρική πρόοδος με $1^{\text{ο}}$ όρο $\alpha_1(\lambda-1)$ και λόγο λ.

2. **Δίνεται η εξίσωση: $x^3 - x^2 - 27x + 35 = 0$**

α) Να βρεθούν οι ακέραιες ρίζες της.

β) Να βρεθεί το άθροισμα S όλων των ριζών της εξίσωσης.

γ) να βρεθεί η αριθμητική πρόοδος της οποίας ο πρώτος όρος είναι ο $\alpha_1 = S$ και το άθροισμα των όρων της που βρίσκο-

νται μεταξύ του 8ου όρου και του 33ου όρου (από τον 9ο όρο μέχρι και τον 32ο όρο της) ισούται με 1428.

δ) Να βρεθεί ο όρος $α_{1961}$ της παραπάνω προόδου.

ε) Να υπολογιστεί το άθροισμα των 2004 πρώτων όρων της παραπάνω προόδου.

Λύση

α) Έχουμε την εξίσωση: $x^3 - x^2 - 27x + 35 = 0$ (1)
Οι πιθανές ακέραιες ρίζες της (1) είναι $\pm 1,\ \pm 5,\ \pm 7$ εύκολα διαπιστώνουμε με το σχήμα Horner ότι από αυτές ρίζα είναι μόνο το 5.

β) Λόγω του (α) η (1) γράφεται:
$(x-5)(x^2+4x-7)=0 \Leftrightarrow$
$x-5=0 \quad (2) \quad ή \quad x^2+4x-7=0 \quad (3)$
Από την (2) $\Leftrightarrow x=5$ η γνωστή ρίζα από το α) ερώτημα ενώ για την (3) είναι: $Δ = 44 > 0$ οπότε αυτή θα έχει δύο ρίζες x_1, x_2 με άθροισμα:

$$x_1 + x_2 = -\frac{β}{α} = -\frac{4}{1} = -4.$$

Έτσι: αν $x_3 = 5$ το άθροισμα των ριζών της εξίσωσης (1) θα είναι: $S=x_1+x_2+x_3 = -4 + 5 = 1$.

γ) Λόγω του (β) ερωτήματος είναι: $S = 1$ οπότε $α_1 = 1$ ο πρώτος όρος της ζητούμενης αριθμητικής προόδου. Έτσι αν ω η διαφορά της προόδου και $Σ = 1428$ (4) το άθροισμα των όρων της, μεταξύ του 8ου και του 33ου όρου τότε:

$$Σ = S_{32} - S_8 = \frac{32}{2}(2α_1 + 31ω) - \frac{8}{2}(2α_1 + 7ω) = ...$$

$$= 24 + 468ω$$

Η (4) $\Leftrightarrow 24 + 468ω = 1428 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 468ω = 1404 \Leftrightarrow ω = 3$$

δ) **Επίσης:** $α_{1961} = α_1 + 1960ω = 1 + 1960\cdot 3 = 5881$

ε) **Ακόμη:** $S_{2004} = \frac{2004}{2}\cdot[2α_1 + (2004-1)ω] =$

$$= 1002\cdot(2\cdot 1 + 2003\cdot 3) = ... = 6.023.023$$

3. Αν ο νιοστος όρος της ακολουθίας $α_ν$ είναι: $α_ν = 5\cdot 2^ν + 5ν - 3$ και η ακολουθία $β_ν$ είναι αριθμητική πρόοδος με πρώτο όρο $β_1 = 2$ και διαφορά $ω = 5$ τότε:

α) Να βρεθεί ο νιοστός όρος της ακολουθίας $β_ν$.

β) Να υπολογιστεί το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της ακολουθίας $β_ν$

γ) Να δειχθεί ότι η ακολουθία $γ_ν = α_ν - β_ν$ με $ν \in \mathbb{N}^*$ είναι γεωμετρική πρόοδος και να βρεθεί, ο πρώτος όρος και ο λόγος της προόδου.

δ) Να υπολογιστεί το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της ακολουθίας $γ_ν$.

ε) Να υπολογιστεί το άθροισμα των 10 πρώτων όρων της ακολουθίας $α_ν$.

Λύση

α) Για την ακολουθία $β_ν$ που είναι αριθμητική πρόοδος με $β_1 = 2$ και $ω = 5$ έχουμε:

$$β_ν = β_1 + (ν-1)ω = 2 + (ν-1)5 = 5ν - 3$$

β) **Είναι:** $S_{10} = \frac{10}{2}(2β_1 + (10-1)ω) = 5(2\cdot 2 + 9\cdot 5) = 245$

γ) Έχουμε την ακολουθία $α_ν$ με τύπο:
$α_ν = 5\cdot 2^ν + 5ν - 3$
Έτσι $γ_ν = α_ν - β_ν = (5\cdot 2^ν + 5ν - 3) - (5ν - 3) =$
$= 5\cdot 2^ν$ **οπότε:** $\frac{γ_{ν+1}}{γ_ν} = \frac{5\cdot 2^{ν+1}}{5\cdot 2^ν} = 2$ σταθερός για κάθε $ν \in \mathbb{N}^*$ οπότε η $γ_ν$ είναι γεωμετρική πρόοδος με: $γ_1 = 5\cdot 2^1 = 10$ και $λ = 2$

δ) Αν S΄ το ζητούμενο άθροισμα τότε:

$$S'_{10} = γ_1\frac{λ^{10}-1}{λ-1} = 10\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1} = 10(2^{10}-1) =$$

$$= 10(1024-1) = 10\cdot 1023 = 10.230$$

ε) **Επειδή:** $γ_ν = α_ν - β_ν$ ή $α_ν = β_ν + γ_ν$ για κάθε $ν \in \mathbb{N}^*$ **οπότε** το ζητούμενο άθροισμα είναι:

$$S = S_{10} + S'_{10} \underset{(δ)}{\overset{(β)}{=}} 2445 + 10.230 = 10.475$$

4. Το νέο Ολυμπιακό στάδιο της Αθήνας.

Εν όψει των Ολυμπιακών αγώνων του 2004 γίνεται επέκταση στις κερκίδες του Ολυμπιακού σταδίου μας. Το νέο στάδιο θα έχει 33 σειρές καθισμάτων. Η πρώτη σειρά θα έχει 800 καθίσματα και η τελευταία 4.160 ενώ ο αριθμός των καθισμάτων θα αυξάνεται εξίσου από σειρά σε σειρά.

Υπολογίστε τη νέα χωρητικότητα του σταδίου δηλαδή το σύνολο των καθισμάτων του σταδίου, καθώς και την αύξηση των καθισμάτων από σειρά σε σειρά.

Λύση

Οι αριθμοί που δίνουν τον αριθμό των καθισμάτων κάθε σειράς, αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου (α_ν) με α_1 = 800, α_ν = 4160, ν = 33. Αν ω ο αριθμός των καθισμάτων που αυξάνεται από σειρά σε σειρά θα ισχύει:

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ δηλαδή

$$\alpha_{33} = \alpha_1 + (33-1)\omega \Leftrightarrow 4160 = 800 + 32\omega \Leftrightarrow \omega = 105$$

Το σύνολο των καθισμάτων του σταδίου δίνεται από το άθροισμα των 33 πρώτων όρων τη παραπάνω αριθμητικής προόδου.

Έτσι: $\Sigma_{33} = \dfrac{33}{2}(800 + 4.160) = 81.840$

5. Ο σύλλογος των καθηγητών.

Τα μέλη του συλλόγου των καθηγητών ενός κολλεγίου της Θεσσαλονίκης είναι πολύ ευγενικοί: κάθε πρωί ανταλλάσσουν όλοι φιλική χειραψία μεταξύ τους.

α) Πόσες χειραψίες ανταλλάσσονται μεταξύ 25/35/60/75/n καθηγητών.

β) Πόσα μέλη έχει ο σύλλογος των καθηγητών αν κάθε πρωί ανταλλάσσονται 351/903/1275/1770/n χειραψίες.

Λύση

α) Αν ο πρώτος καθηγητής ανταλλάσσει ν χειραψίες (α_1 = ν), ο επόμενος θα ανταλλάσσει ν – 1 καινούργιες χειραψίες δηλαδή $\alpha_2 = \alpha_1 + (-1) = \nu - 1$, ο επόμενος $\alpha_3 = \alpha_1 + (-2) = \nu - 2$ κ.ο.κ. Άρα έχουμε αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = \nu$ και $\omega = -1$.

$$\Sigma_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right] = \frac{\nu}{2}\left[2\nu + (\nu-1)(-1)\right] =$$

$$= \frac{\nu}{2}(2\nu - \nu + 1) = \frac{\nu}{2}(\nu+1) = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$$

Άρα: $\Sigma_{25} = \dfrac{25\cdot 26}{2} = 235,\ \Sigma_{35} = \dfrac{35\cdot 36}{2} = 630,$

$$\Sigma_{60} = \frac{60\cdot 61}{2} = 1830,\ \Sigma_{79} = \frac{75\cdot 76}{2} = 2850$$

$$\Sigma_n = \frac{n\cdot(n+1)}{2} = \ldots$$

β) Επιλύουμε τις εξισώσεις:

- $\dfrac{\nu(\nu+1)}{2} = 351 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu = 702 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 702 = 0$

  $\Leftrightarrow \nu = 26$ (η λύση ν = – 27 απορρίπτεται)

- $\dfrac{\nu(\nu+1)}{2} = 903 \Leftrightarrow \nu^2 + \nu = 1806 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow \nu^2 + \nu - 1806 = 0$

  $\Leftrightarrow \nu = 42$ (η λύση ν = – 43 απορρίπτεται)

  Στη γενική περίπτωση: $\dfrac{\nu\cdot(\nu+1)}{2} = n \Leftrightarrow \ldots$

6. Μία γρήγορη δυσφήμηση

«Θα 'θελα να μην το πω, αλλά η Μαρία από το Β₁ τμήμα έκανε χρήση ναρκωτικών ουσιών» **ψιθύρισε καυχησιάρικα ένας συμμαθητής του εντελώς αθώου κοριτσιού σ' έναν φίλο του στην αρχή του σχολείου στις 8 το πρωί.**

Αυτό δεν θα ήταν σημαντικό αλλά η υποτιθέμενη "είδηση" διαδόθηκε το επόμενο εικοσάλεπτο σε άλλους δύο συμμαθητές τους. Αυτοί οι δύο το είπαν, στο επόμενο εικοσάλεπτο σε άλλους δύο.

Με τον ίδιο ρυθμό διαδιδόταν η αβάσιμη είδηση σε όλο και περισσότερους μαθητές τα επόμενα εικοσάλεπτα.

α) Σχηματίστε μια ακολουθία που να δίνει τον αριθμό των μαθητών που ενημερώθηκε μέχρι το τέλος του 1ου, 2ου, ... νου, εικοσάλεπτου.

β) Επίσης μια ακολουθία που να δίνει τον αριθμό των μαθητών που ενημερώθηκαν κατά τη διάρκεια του 1ου, 2ου, ... νου εικοσάλεπτου.

γ) Πόσοι μαθητές γνωρίζουν μετά την πάροδο 1, 2, 3 εικοσαλέπτων;

δ) Πόσοι μαθητές γνωρίζουν μετά την πάροδο 1, 2, 3 ωρών;

ε) Κάτω από αυτές τις συνθήκες, τι ώρα θα έχει "αμαυρωθεί" η φήμη της Μαρίας σε όλους τους 512 μαθητές του σχολείου;

Λύση

Θεωρούμε την ακολουθία (α_ν) που δίνει αριθμό των μαθητών που "ενημερώνονται" κάθε εικοσάλεπτο από τον πρώτο που το 'μαθε απ' τον αρχικό δυσφημιστή. Η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος με α_1 = 2 και λ = 2, ν θετικός ακέραιος. **Άρα:** $\alpha_\nu = \alpha_1\cdot\lambda^{\nu-1} = 2\cdot 2^{\nu-1} = 2^\nu$, ν θετικός ακέραιος.

α) **Έστω** (β_ν) η ακολουθία που δίνει το συνολικό αριθμό μαθητών που γνωρίζουν τα “νέα” κάθε εικοσάλεπτο που περνάει. Έτσι: $\beta_\nu = 2 + \Sigma_\nu$, όπου Σ_ν το άθροισμα των όρων της προόδου α_ν και 2 ο αριθμός των πρώτων δύο δυσφημιστών.

Έτσι: $\beta_\nu = 2 + \alpha_1 \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} = 2 + 2 \cdot \dfrac{2^\nu - 1}{2 - 1} =$

$= 2 + 2 \cdot 2^\nu - 2 = 2^{\nu+1}$ ν θετικός ακέραιος.

β) Έστω (γ_ν) η ακολουθία που δίνει το σύνολο των μαθητών που “ενημερώνονται” στη διάρκεια κάθε εικοσάλεπτου. Τότε:

$\gamma_\nu = 2 + \alpha_\nu = 2 + \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = 2 + 2 \cdot 2^{\nu-1} = 2 + 2^\nu$,

ν θετικός ακέραιος

γ) $\beta_1 = 2^{1+1} = 2^2 = 4$, $\beta_2 = 2^{2+1} = 8$, $\beta_3 = 2^{3+1} = 2^4 = 16$

δ) 1η ώρα: $\beta_3 = 2^4 = 16$

2η ώρα: $\beta_6 = 2^7 = 64$

3η ώρα: $\beta_9 = 2^{10} = 1024$

Σημείωση: κάθε ώρα έχει 3 εικοσάλεπτα.

δ) $\beta_\nu = 512 \Leftrightarrow 2^{\nu+1} = 512 \Leftrightarrow \nu + 1 = 9 \Leftrightarrow \nu = 8$

(δηλ. σε 8 εικοσάλεπτα)

Άρα: Η φήμη της Μαρίας θα “αμαυρωθεί” στις 10.40΄ ακριβώς!

7. Από ένα Κινέζικο βιβλίο: “9 βιβλία Αριθμητικής Τεχνικής” που είναι γνωστό από τον 1ο μ.Χ. αιώνα και θεωρείται το αρχαιότερο διδακτικό βιβλίο αριθμητικής, διαβάζουμε την άσκηση:

“Ένα κορίτσι, που ξέρει να υφαίνει πολύ καλά, κάνει κάθε μέρα το διπλάσιο από τη προηγούμενη. Μετά από 5 μέρες έχει φτιάξει 5 feet (πόδια). Πόσο ύφανε κάθε μέρα;”

Λύση

Το ύφασμα που υφαίνει κάθε μέρα δίνεται από τους όρους μιας γ.π. με πρώτο όρο α_1 το ύφασμα που υφαίνει την πρώτη μέρα και λόγο $\lambda = 2$.

Θα ισχύει: $\alpha_\nu = \alpha_1 \cdot \lambda^{\nu-1} = \alpha_1 \cdot 2^{\nu-1}$ όπου ν θετικός ακέραιος.

Έτσι, $\Sigma_5 = 5 \Leftrightarrow \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^5 - 1}{\lambda - 1} = 5$

Άρα $\alpha_1 \cdot \dfrac{2^5 - 1}{2 - 1} = 5 \Leftrightarrow 31\alpha_1 = 5 \Leftrightarrow \alpha_1 = \dfrac{5}{31}$ πόδια.

Άρα: 1η μέρα: $\alpha_1 = \dfrac{5}{31}$ πόδια

2η μέρα: $\alpha_2 = \dfrac{10}{31}$ πόδια

3η μέρα: $\alpha_3 = \dfrac{20}{31}$ πόδια

4η μέρα: $\alpha_4 = \dfrac{40}{31}$ πόδια

5η μέρα: $\alpha_5 = \dfrac{80}{31}$ πόδια

8. Σε παλιά Γερμανικά βιβλία συναντάμε το παρακάτω πρόβλημα:

“Ένας καβαλάρης θέλει να πεταλώσει το άλογό του. Κάθε πέταλο πρέπει να στερεωθεί με 6 καρφιά. Ο πεταλωτής έχει τον εξής παράλογο για πολλούς αλλά πραγματικό τιμοκατάλογο: 1ο καρφί: 2 λεπτά, 2ο καρφί: 2 λεπτά, 3ο καρφί: 4 λεπτά, 4ο καρφί: 8 λεπτά κ.λ.π.

α) Πόσο κοστίζει συνολικά το πετάλωμα του αλόγου;

β) Αν ο καβαλάρης έχει ακριβώς 50 ! μαζί του. Με πόσα καρφιά μπορεί να στερεώσει κάθε πέταλο από τα 4;

Λύση

Η αξία κάθε καρφιού δίνεται από τους όρους μιας ακολουθίας που είναι γ.π. με α = 1 και λ = 2. **Άρα:** $\alpha_\nu = \alpha_1\lambda^{\nu-1}$ δηλαδή $\alpha_\nu = 2^{\nu-1}$, ν θετικός ακέραιος.

α) Προφανώς ο καβαλάρης χρειάζεται 24 καρφιά

Άρα: $\Sigma_{24} = \alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^{24} - 1}{2 - 1}$ άρα

$\Sigma_{24} = 1 \cdot \dfrac{2^{24} - 1}{2 - 1} = 2^{24} - 1 = 16.777.210$ λεπτά

ή 167.772 !.

Προφανώς το ποσό αυτό είναι απαγορευτικό για τον καβαλάρη!

β) **Πρέπει:** $\Sigma_\nu < 50!$ ή $\Sigma_\nu < 5000$ λεπτά δηλαδή $\alpha_1 \cdot \dfrac{\lambda^\nu - 1}{\lambda - 1} < 5000$.Άρα $1 \cdot \dfrac{2^\nu - 1}{2 - 1} < 5000 \Leftrightarrow 2^\nu < 5001$

Όμως: $2^{12} = 4096 < 5001$

Δηλαδή ο καβαλάρης μπορεί να αγοράσει 12 καρφιά, οπότε θα στερεώσει κάθε πέταλο με 3 καρφιά (... και θα πάρει και ρέστα!)

Εκθετική και Λογαριθμική Συνάρτηση

1. **Στις παρακάτω ερωτήσεις να επιλεγεί η σωστή απάντηση.**

α) Η συνάρτηση $f(x) = \ln(x^2 - 5x + 6)$ έχει πεδίο ορισμού το:

i) $(2, 3)$ ii) $[2,3]$ iii) $(3,+\infty)$
iv) $(-\infty,2)$ v) $(-\infty,2)\cup(3,+\infty)$

β) Η συνάρτηση $f(x) = \log 25x - 10$ διέρχεται από το σημείο:

i) $A(2, 10)$ ii) $B(4, -8)$ iii) $(4, 8)$
iv) $(-4, -8)$ v) $(8, -4)$

γ) Η παράσταση $A = \log 5^3$ είναι ίση με:

i) 3 ii) 5 iii) 10
iv) 15 v) $3\log 5$

δ) Η παράσταση $B = \log 25 - \log 5$ είναι ίση με:

i) $\log 5^3$ ii) $\log^2 5$ iii) $\log 5$
iv) $2\log 5$ v) $\log 5^2$

ε) Η παράσταση $\Gamma = -\ln 5 + 3\ln 2$ είναι ίση με:

i) $\ln\frac{5}{2}$ ii) $\ln\frac{5}{8}$ iii) $\ln\frac{5}{2}$
iv) $\ln\frac{8}{5}$ v) $\ln\frac{5}{3}$

στ) Η παράσταση $\Delta = 10^{\log 5}$ είναι ίση με:

i) 5 ii) 10 iii) 2
iv) 2^2 v) 5^2

ζ) Η παράσταση $E = \frac{1}{3}\log 125 + \frac{1}{4}\log 16$ είναι ίση με:

i) $\log 5$ ii) 1 iii) 2
iv) 10 v) $\log 5\cdot\log 2$

η) Η παράσταση $Z = 100^{1+\log\sqrt{8}-\log 2}$ είναι ίση με:

i) 300 ii) 200 iii) 800
iv) 400 v) 120

θ) Η παράσταση

$$H = 7\log\sqrt[7]{7+4\sqrt{3}} + 2\log\left(2-\sqrt{3}\right)$$ **είναι ίση με:**

i) 5 ii) 0 iii) 7
iv) 3 v) $\log 2$

Απαντήσεις

α) v, β) ii, γ) v, δ) iii, ε) iv, στ) i, ζ) ii, η) ii, θ) ii.

2. **α) Να βρεθούν οι x, ψ όταν:**

$$3^x + 3^\psi = 4 \quad \text{και} \quad 2x - \psi + 1 = 0$$

β) Να λυθεί η εξίσωση: $\ln(2^\omega + 12) = 2\omega\ln 2$

γ) Να εξεταστεί αν οι x, ψ, ω αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου της οποίας να βρεθεί η διαφορά και ο εικοστός όρος.

δ) Να λυθεί η ανίσωση:

$$\log\left[\log\left(\psi\cdot z^2 - (x+\psi+\omega)z + 12\right)\right] < 0$$

με άγνωστο το z και τιμές για τους x, ψ, ω αυτές που βρέθηκαν στα ερωτήματα (α), (β).

Λύση

α) **Έχουμε:** $3^x + 3^\psi = 4 \quad (1)$ και
$2x - \psi + 1 = 0 \Leftrightarrow \psi = 2x + 1 \quad (2)$

Η (1) $\overset{(2)}{\Leftrightarrow} 3^x + 3^{2x+1} = 4 \Leftrightarrow 3\cdot 3^{2x} + 3^x - 4 = 0 \quad (3)$

Θέτουμε $3^x = \omega \quad (4)$ οπότε η (3) γίνεται:

$3\omega^2 + \omega - 4 = 0 \Leftrightarrow \omega = -\frac{4}{3}$ ή $\omega = 1$.

Άρα: $3^x = -\frac{4}{3}$ (αδύνατη) ή $3^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ και από την (2): $\psi = 1$.

β) Έχουμε την εξίσωση: $\ln(2^\omega + 12) = 2\omega\ln 2$ με $\omega\in\mathbb{R}$ γιατί $2^\omega + 12 > 0$, για κάθε $\omega\in\mathbb{R}$. Έτσι η εξίσωση γράφεται:

$$\ln\left(2^\omega + 12\right) = \ln 2^{2\omega} \Leftrightarrow 2^\omega + 12 = 2^{2\omega} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2\omega} - 2^\omega - 12 = 0 \qquad (1)$$

Θέτουμε: $2^\omega = u$ (2). Οπότε η (1) γίνεται:
$u^2 - u - 12 = 0 \Leftrightarrow u = -3$ ή $u = 4$.

Άρα: $2^\omega = -3$ αδύνατη ή $2^\omega = 2^2 \Leftrightarrow \omega = 2$.

γ) Λόγω των (α), (β) είναι $x = 0$, $\psi = 1$, $\omega = 2$ που προφανώς αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο $\alpha_1 = 0$ και διαφορά $\omega = 1$.

Έτσι $\alpha_{20}=\alpha_1+(20-1)\omega=0+19\cdot 1=19$

δ) Έχουμε την ανίσωση:

$$\log\left[\log\left(\psi\cdot z^2-(x+\psi+\omega)\cdot z+12\right)\right]<0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log\left[\log\left(z^2-3z+12\right)\right]<0 \quad (1)$$

Πρέπει: $z^2 - 3z + 12 > 0$ που ισχύει για κάθε $z\in\mathbb{R}$ γιατί η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι αρνητική. **Επίσης πρέπει:**

$$\log\left(z^2-3z+12\right)>0\Leftrightarrow z^2-3z+12>1\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow z^2-3z+11>0$ που ισχύει για κάθε $z\in\mathbb{R}$ για τον ίδιο λόγο ($\Delta < 0$).

Έτσι η (1) $\Leftrightarrow \log\left(z^2-3z+12\right)<1\Leftrightarrow$

$z^2-3z+12<10\Leftrightarrow z^2-3z+2<0 \Leftrightarrow 1<z<2$.

3. Α. α) Αν ισχύει ln(συνx) = 0 τότε ο x ισούται με:

i) $\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$ **ii)** $\frac{\kappa\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$ **iii)** $2\kappa\pi,\kappa\in\mathbb{Z}$

iv) $\frac{3\kappa\pi}{2},\kappa\in\mathbb{Z}$ **v)** $\frac{\kappa\pi}{3},\kappa\in\mathbb{Z}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

β) Έστω α, β, γ, θ θετικοί πραγματικοί αριθμοί διάφοροι του 1 και διάφοροι μεταξύ τους ανά δύο.

i) Οι λογάριθμοι $\log_\alpha\theta$, $\log_\beta\theta$, $\log_\gamma\theta$ να μετασχηματιστούν σε λογάριθμους με βάση το 10.

ii) Αν ισχύει: $\frac{\log_\alpha\theta}{\log_\gamma\theta}=\frac{\log_\alpha\theta-\log_\beta\theta}{\log_\beta\theta-\log_\gamma\theta}$ τότε να δείξετε ότι οι αριθμοί α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Β. α) Τι θα παρατηρούσατε για τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f_1(x) = 7^x$ και $f_2(x)=\left(\frac{1}{7}\right)^x$, $x\in\mathbb{R}$.

β) Δίνονται οι αριθμοί $\alpha=\log x$, $\beta=\log\psi$, $\gamma=\log 45$, $\delta=\log\frac{25\psi}{x}$, $\varepsilon=\log\frac{x}{5}$, $\zeta=\log\frac{1}{5\psi}$ με x, ψ > 0. Αν οι α, β, γ καθώς και οι δ, ε, ζ αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου να βρεθούν οι x, ψ.

Λύση

Α) α) Σωστή απάντηση είναι η (iii).

β) i) **Είναι:** $\log_\alpha\theta=\frac{\log\theta}{\log\alpha}$,

$$\log_\beta\theta=\frac{\log\theta}{\log\beta},\ \log_\gamma\theta=\frac{\log\theta}{\log\gamma}$$

ii) **Επίσης:** $\frac{\log_\alpha\theta}{\log_\gamma\theta}=\frac{\log_\alpha\theta-\log_\beta\theta}{\log_\beta\theta-\log_\gamma\theta}\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \log_\alpha\theta\left(\log_\beta\theta-\log_\gamma\theta\right)=$$
$$=\log_\gamma\theta\left(\log_\alpha\theta-\log_\beta\theta\right)$$
$$\Leftrightarrow \log_\alpha\theta\cdot\log_\beta\theta-\log_\alpha\theta\cdot\log_\gamma\theta=$$
$$=\log_\gamma\theta\cdot\log_\alpha\theta-\log_\gamma\theta\cdot\log_\beta\theta\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log_\alpha\theta\cdot\log_\beta\theta+\log_\beta\theta\cdot\log_\gamma\theta=$$
$$=2\log_\alpha\theta\cdot\log_\gamma\theta\overset{(i)}{\Leftrightarrow}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\log\theta}{\log\alpha}\cdot\frac{\log\theta}{\log\beta}+\frac{\log\theta}{\log\beta}\cdot\frac{\log\theta}{\log\gamma}=$$
$$=2\frac{\log\theta}{\log\alpha}\cdot\frac{\log\theta}{\log\gamma}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\log\alpha\cdot\log\beta}+\frac{1}{\log\beta\cdot\log\gamma}=\frac{2}{\log\alpha\cdot\log\gamma}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \log\gamma+\log\alpha=2\log\beta$$
$$\Leftrightarrow \log(\alpha\gamma)=\log\beta^2\Leftrightarrow\alpha\gamma=\beta^2$$

οπότε οι α, β, γ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.

Β) α) Για $x\in\mathbb{R}$ είναι:

$$f_2(x)=\left(\frac{1}{7}\right)^x=7^{-x}=f_1(-x)$$

οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f_1, f_2 είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα ψ΄ψ.

β) Έχουμε x, ψ > 0. Εφόσον οι α, β, γ καθώς και οι δ, ε, ζ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου θα ισχύει:

$$\left.\begin{matrix}2\beta=\alpha+\gamma\\ \text{και}\\ 2\varepsilon=\delta+\zeta\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow \begin{matrix}2\log\psi=\log x+\log 45\\ 2\log\frac{x}{5}=\log\frac{25\psi}{x}+\log\frac{1}{5\psi}\end{matrix}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\log\psi^2=\log 45x\\ \log\left(\frac{x}{5}\right)^2=\log\frac{25\psi}{x}\cdot\frac{1}{5\psi}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow\left.\begin{matrix}\psi^2=45x\\ \frac{x^2}{25}=\frac{5}{x}\end{matrix}\right\}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x^3=125 \\ \psi^2=45\cdot x \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=5 \\ \psi^2=225 \end{array}\right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} x=5 \\ \psi=\pm 15 \end{array}\right\} \text{ οπότε } \left.\begin{array}{l} x=5 \\ \psi=15,\ (\psi>0) \end{array}\right\}$$

4. α) Να λυθεί η εξίσωση:
$2^{συνx}+2\cdot 2^{-συνx}-3=0$ στο διάστημα $[0,\pi]$

β) Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{e^{συν^2x}}{e}=e^{-2συν^3x+2συνx}$

στο διάστημα $[0, 2\pi)$

γ) Να λυθεί η εξίσωση: $e^{3\ln x}=7e^{\ln x}+6$

Λύση

α) Έχουμε την εξίσωση:

$$2^{συνx}+2\cdot 2^{-συνx}-3=0 \Leftrightarrow 2^{συνx}+2\frac{1}{2^{συνx}}-3=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2^{2συνx}-3\cdot 2^{συνx}+2=0 \quad (1)$$

Θέτουμε: $2^{συνx}=\psi \quad (2)$ οπότε η (1) γίνεται $\psi^2-3\psi+2=0 \Leftrightarrow \psi=1$ ή $\psi=2$.

Άρα: $2^{συνx}=1 \Leftrightarrow συνx=0$ άρα $x=\dfrac{\pi}{2}$ ή

$2^{συνx}=2 \Leftrightarrow συνx=1$ άρα $x=0$.
(υπ' όψιν $x\in[0,\pi]$).

β) Έχουμε την εξίσωση:

$$\frac{e^{συν^2x}}{e}=e^{-2συν^3x+2συνx} \Leftrightarrow e^{συν^2x-1}=e^{-2συν^3x+2συνx} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow συν^2x-1=-2συν^3x+2συνx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2συν^3x+συν^2x-2συνx-1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow συν^2x(2συνx+1)-(2συνx+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2συνx+1)(συν^2x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} 2συνx+1=0 \\ ή \\ συν^2x-1=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} συνx=-\dfrac{1}{2} \\ ή \\ συνx=-1 \\ ή \\ συνx=1 \end{array}\right\} \text{ οπότε:}$$

$$\left.\begin{array}{l} x=\dfrac{2\pi}{3} \text{ ή } x=\dfrac{4\pi}{3} \\ ή \quad x=\pi \\ ή \quad x=0 \end{array}\right\} \text{ οι λύσεις εφόσον } x\in[0,2\pi)$$

γ) Έχουμε την εξίσωση:

$$e^{3\ln x}=7e^{\ln x}+6 \Leftrightarrow e^{3\ln x}-7e^{\ln x}-6=0$$

Πρέπει $x>0$, θέτουμε $e^{\ln x}=\psi$ (2) οπότε η (1) γράφεται:

$$\psi^3-7\psi-6=0 \Leftrightarrow \psi^3-\psi-6\psi-6=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \psi(\psi^2-1)-6(\psi+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \psi(\psi-1)(\psi+1)-6(\psi+1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\psi+1)(\psi^2-\psi-6)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} \psi+1=0 \\ ή \\ \psi^2-\psi-6=0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \psi=-1 \text{ ή} \\ \psi=-2 \text{ ή} \\ \psi=3 \end{array}\right\} (2)$$

Άρα: $e^{\ln x}=-1$ αδύνατη ή $e^{\ln x}=-2$ αδύνατη ή $e^{\ln x}=3 \Leftrightarrow x=3$ η ζητούμενη λύση.

5. Σε μια περιοχή της ευρωπαϊκής ένωσης λόγω των μέτρων που πάρθηκαν ο πληθυσμός των αγροτών μειώνεται σύμφωνα με τον νόμο της εκθετικής μεταβολής. Αν ο αρχικός πληθυσμός ήταν 8 χιλιάδες αγρότες και σε δύο χρόνια έμεινε ο μισός τότε να βρεθούν:

α) Η συνάρτηση που δίνει τον πληθυσμό κάθε χρονική στιγμή.

β) Ποιος θα είναι ο πληθυσμός των αγροτών ύστερα από τέσσερα χρόνια;

γ) Πόσος χρόνος θα έχει περάσει όταν ο αγροτικός πληθυσμός της περιοχής θα έχει μειωθεί στους χίλιους αγρότες;

Λύση

α) Εφόσον η μείωση του αγροτικού πληθυσμού ακολουθεί τον νόμο της εκθετικής μεταβολής θα είναι: $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$ (1) όπου $t>0$ (σε χρόνια) και $c\in\mathbb{R}$.

Έχουμε $Q_0=8$ χιλιάδες ο αρχικός πληθυσμός και $Q(2)=4$ χιλιάδες.

Έτσι από την (1) για $t=2$ παίρνουμε:

$$Q(2)=Q_0\cdot e^{2c} \Leftrightarrow 4=8e^{2c} \Leftrightarrow \frac{1}{2}=e^{2c} \Leftrightarrow e^c=\sqrt{\frac{1}{2}}$$

οπότε: $Q(t)=8\cdot\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^t$ με $t>0$ (σε χρόνια) η ζητούμενη συνάρτηση.

β) Λόγω του (α) έχουμε:

$$Q(4)=8\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^4=8\cdot\frac{1}{4}=2$$

Δηλαδή ύστερα από τέσσερα χρόνια ο πληθυσμός των αγροτών της περιοχής θα έχει μειωθεί στις 2 χιλιάδες.

γ) Αν Q(t) = 1 (1000 αγρότες) τότε λόγω του (α) είναι: $1=8\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^t \Leftrightarrow \frac{1}{8}=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^3=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow 3=\frac{t}{2} \Leftrightarrow t=6$$

Άρα κάτι τέτοιο θα έχει γίνει ύστερα από 6 χρόνια.

6. Μία ποσότητα ραδιενεργού υλικού θάβεται και με την πάροδο του χρόνου μειώνεται ακολουθώντας το νόμο της εκθετικής μεταβολής.

α) Αν γνωρίζουμε ότι μετά από δύο χρόνια έχει απομείνει το $\frac{1}{3}$ της αρχικής ποσότητας να γραφεί ο τύπος της εκθετικής μεταβολής.

β) Αν μετά από τέσσερα χρόνια η ποσότητα που έχει απομείνει είναι 1 κιλό να βρεθεί η αρχική ποσότητα που θάφτηκε.

γ) Μετά από πόσα χρόνια η ποσότητα που θα έχει απομείνει θα είναι $\frac{1}{81}$ κιλά;

Λύση

α) Εφόσον η μείωση της ραδιενεργού ποσότητας ακολουθεί το νόμο της εκθετικής μεταβολής θα είναι: $Q(t)=Q_0\cdot e^{ct}$ (1) όπου $t>0$ (σε χρόνια) και $c\in\mathbb{R}$. Όμως $Q(2)=\frac{1}{3}Q_0$ οπότε από την (1) για t = 2 παίρνουμε:

$$Q(2)=Q_0\cdot e^{2c} \Leftrightarrow \frac{1}{3}Q_0=Q_0\cdot e^{2c} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3}=e^{2c} \Leftrightarrow e^c=\sqrt{\frac{1}{3}}$$ οπότε:

$$Q(t)=Q_0\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^t$$ ο ζητούμενος τύπος

β) **Είναι** Q(4) = 1 οπότε από τον τύπο $Q(t)=Q_0\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^t$ για t = 4 παίρνουμε:

$$Q(4)=Q_0\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^4 \Leftrightarrow 1=Q_0\left(\frac{1}{3^2}\right) \Leftrightarrow Q_0=9$$ κιλά η ζητούμενη αρχική ποσότητα.

γ) Λόγω των (α), (β) έχουμε: $Q(t)=9\cdot\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^t$ οπότε αν $Q(t)=\frac{1}{81}$ θα είναι:

$$\frac{1}{81}=9\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)^t \Leftrightarrow \frac{1}{3^4}=3^2\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3^6}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^6=\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow 6=\frac{t}{2} \Leftrightarrow t=12$$

Δηλαδή ύστερα από 12 χρόνια θα έχει απομείνει το $\frac{1}{81}$ κιλά της αρχικής ποσότητας.

7. Η ατμοσφαιρική πίεση μειώνεται όσο αυξάνεται η απόσταση από το φλοιό της γης. Η σχέση μεταξύ πίεσης και ύψους περιγράφεται προσεγγιστικά από τον λεγόμενο βαρομετρικό τύπο ύψους: $P_h=P_0\cdot 0{,}88^h$ όπου P_0 η πίεση στο φλοιό και h το ύψος σε km)

α) Αν P_0 = 1013 mmHg τότε πόση είναι η πίεση σε ύψος: 500, 750, 1000, 1500, 2500, 5000, 7500, 10000 μέτρων;

β) Τι πίεση επικρατεί στην κορυφή των παρακάτω βουνών:
Όλυμπος (ύψος 2817 μ.)
Λευκό όρος (4807 μ.)
Κιλιμάντζαρο (5895 μ.)
Έβερεστ (8848 μ.)
από την επιφάνεια της θάλασσας αν η πίεση είναι 995 mmHg στην επιφάνεια της θάλασσας.

γ) Δώστε την πίεση στην κορυφή των παραπάνω βουνών ως ποσοστό της πίεσης στην επιφάνεια της θάλασσας.

δ) Σε μια ειδυλλιακή πόλη σε ύψος 260 μ. από την θάλασσα μια ωραία μέρα καλοκαιριού μετρήθηκε η πίεση και βρέθηκε 980 mmHg. Σε ποια τιμή πίεση στην επιφάνεια της θάλασσας αντιστοιχεί;

Λύση

α) $P_{500}=1013\cdot 0{,}88^{0,5}=950{,}27\simeq 950\,\text{mmHg}$

$P_{750}=1013\cdot 0{,}88^{0,75}=920{,}38\simeq 920\,\text{mmHg}$

. . .

$$P_{10000}=1013\cdot 0{,}88^{10}=282{,}12\simeq 282\,\text{mmHg}$$

β) Έστω x το βάθος της θάλασσας και P_x η πίεση στην επιφάνειά της. Τότε:

$$P_x=P_0\cdot 0{,}88^x \Leftrightarrow 995=P_0\cdot 0{,}88^x \Leftrightarrow 0{,}88^x=\frac{995}{P_0}$$

P_0: η πίεση στο φλοιό της γης)

Αν h το ύψος των βουνών από την επιφάνεια της θάλασσας τότε: P

$P=P_0\cdot 0{,}88^{h+x}$ (όπου P η ζητούμενη πίεση)

Άρα:

$$P=P_0\cdot 0{,}88^h\cdot 0{,}88^x=P_0\cdot 0{,}88^h\cdot\frac{995}{P_0}=995\cdot 0{,}88^h$$

Έτσι για τον Όλυμπο έχουμε:

$$P=995\cdot 0{,}88^{2{,}917}=685{,}29\simeq 685\text{ mmHg}$$

για το Λευκό όρος:

$$P=995\cdot 0{,}88^{4{,}807}=538{,}20\simeq 538\text{ mmHg}$$

για το Κιλιμάντζαρο:

$$P=995\cdot 0{,}88^{5{,}895}=468{,}32\simeq 468\text{ mmHg}$$

και για το Έβερεστ:

$$P=995\cdot 0{,}88^{8{,}848}=321{,}07\simeq 321\text{ mmHg}$$

γ) $\dfrac{P}{P_x}=\dfrac{P_0\cdot 0{,}88^{h+x}}{P_0\cdot 0{,}88^x}=0{,}88^h$

Για τα προηγούμενα βουνά αντίστοιχα έχουμε:

$$\frac{P}{P_x}=0{,}88^{2{,}971}=68{,}87\%,$$

$$\frac{P}{P_x}=0{,}88^{4{,}807}=54{,}09\%,$$

$$\frac{P}{P_x}=0{,}88^{5{,}895}=47{,}06\%,$$

$$\frac{P}{P_x}=0{,}88^{8{,}848}=32{,}26\%$$

δ) $\dfrac{P}{P_x}=0{,}88^h \Leftrightarrow \dfrac{P}{P_x}=0{,}88^{0{,}260} \Leftrightarrow P=96{,}7\%\cdot P_x$

Άρα: $980=96{,}7\%\cdot P_x \Leftrightarrow P_x=1013\text{ mmHg}$

8. Για να προστεθεί ο άνθρωπος από την ιδιαίτερα επικίνδυνη ακτινοβολία – γ χρησιμοποιούνται τοιχώματα από πυκνό μόλυβδο. Η ένταση μιας τέτοιας, ακτινοβολίας όταν εισέρχεται στο μόλυβδο ακολουθεί μια εκθετική μείωση. Σε βάθος 1,5 cm η ένταση έχει μειωθεί στο μισό της αρχικής.

α) Ποια συνάρτηση περιγράφει την μείωση της έντασης της ακτινοβολίας, σε πυκνό μόλυβδο;

β) Σε τι ποσοστό της αρχικής έχει μειωθεί η έντασης της ακτινοβολίας σε βάθος 12 cm / 18 cm / 45 cm / 90 cm/ μέσα σε πυκνό μόλυβδο;

γ) Συγκρίνετε τα αποτελέσματα αυτά με αυτά που ια προκύψουν αν αντί για πυκνό μόλυβδο προστατευθούμε από γ – ακτινοβολία επίσης με νερό, αλουμίνιο ή πάγο όπου η ένταση υποδιπλασιάζεται σε 25, 9, 2, 8 cm αντίστοιχα!

Λύση

α) Η συνάρτηση είναι της μορφής: $Q(x)=Q_0\cdot e^{cx}$ με $c<0$, Q_0 η αρχική ακτινοβολία, $x>0$. Όμως:

$$\frac{Q_0}{2}=Q_0\cdot e^{c\cdot 1{,}5}\Leftrightarrow e^c=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}=\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\ \text{ή}\ 2^{-\frac{2}{3}}$$

Άρα: $Q(x)=Q_0\cdot\left(2^{-\frac{2}{3}}\right)^x \Leftrightarrow Q(t)=Q_0\cdot 2^{-\frac{2x}{3}},\ x>0$

β) $Q_1^{(12)}=Q_0\cdot 2^{\frac{-2\cdot 12}{3}}=Q_0\cdot 2^{-8}\Leftrightarrow \dfrac{Q_1}{Q_0}=2^{-8}=$

$=0{,}0039=0{,}39\%\simeq 0{,}4\%$

$Q_2^{(18)}=Q_0\cdot 2^{\frac{-2\cdot 18}{3}}=Q_0\cdot 2^{-12}\Leftrightarrow \dfrac{Q_2}{Q_0}=2^{-12}=$

$=0{,}00024=0{,}024\%$

γ) Η συνάρτηση φυσικά αλλάζει και γίνεται για το νερό: $Q(x)=Q_0\cdot e^{cx}$ οπότε

$$\frac{Q_0}{2}=Q_0\cdot e^{c\cdot 25}\Leftrightarrow \frac{1}{2}=\left(e^c\right)^{25}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow e^c=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{25}}\Leftrightarrow e^c=\frac{1}{\sqrt[25]{2}}\ \text{ή}\ 2^{-\frac{1}{25}}$$

Άρα $Q(x)=Q_0-2^{-\frac{x}{25}},\ x>0$ και

$$Q_1(12)=Q_0\cdot 2^{-\frac{12}{25}}\Leftrightarrow \frac{Q_1}{Q_0}=2^{-\frac{12}{25}}=0{,}7169\simeq 72\%$$

ενώ $Q_1(18)=Q_0\cdot 2^{-\frac{12}{18}}\Leftrightarrow \dfrac{Q_2}{Q_0}=2^{-\frac{2}{3}}=0{,}63=63\%$

Να γίνουν ως άσκηση τα ποσοστά του αλουμινίου και του πάγο