Αφορμή για Επανάληψη στη Γεωμετρία της Α΄ Λυκείου

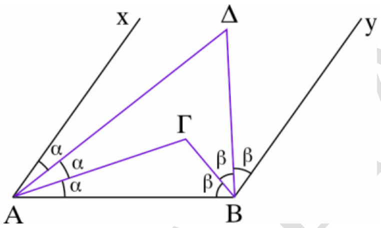
Κώστας Βακαλόπουλος – Τάσος Γαβράς

1. *Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης (A) με ένα μόνο στοιχείο της στήλης (B).*

Στήλη (A)	Στήλη (B)
α. Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο	**1. Δύο απέναντι πλευρές παράλληλες**
β. Τραπέζιο	**2. Οι διαγώνιες ίσες και τέμνονται κάθετα**
γ. Ρόμβος	**3. Είναι παραλληλόγραμμο και όλες οι πλευρές του είναι ίσες.**
δ. Τετράγωνο	**4. Οι διαγώνιοι του είναι ίσες.**

(Απ.: α → 4, β → 1, γ → 3, δ → 2)

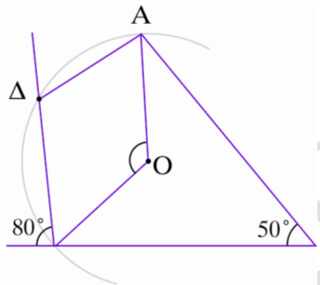
2. *Στο παρακάτω σχήμα είναι Ax//By. Η τιμή της γωνίας ω ισούται με:*



(Απ.: Β)

3. *Να αντιστοιχίσετε κάθε γωνία της στήλης (A) με το μέτρο της στη στήλη (B).*

Στήλη (A)	Στήλη (B)
α. $A\hat{\Delta}\Gamma$	**1. 30°**
β. $A\hat{O}\Gamma$	**2. 40°**
γ. $\Delta\hat{A}B$	**3. 50°**
δ. $O\hat{A}\Gamma$	**4. 60°**
ε. $A\hat{\Delta}x$	**5. 80°**
	6. 100°
	7. 150°
	8. 130°



(Απ.: α → 8, β → 6, γ → 5, δ → 2, ε → 3)

4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας τη λέξη Σωστό ή Λάθος δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.*

α. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και έστω ΒΔ το ύψος του. Τότε το ΒΔ είναι διάμεσος και διχοτόμος του ΑΒΓ.

β. Οι απέναντι γωνίες ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου είναι ίσες.

γ. Αν ένα παραλληλόγραμμο έχει μια γωνία ορθή, τότε έχει και ίσες διαγωνίους.

(Απ.: α. Λάθος, β. Λάθος, γ. Σωστό)

5. *Συμπλήρωσε σωστά τις παρακάτω προτάσεις:*

α. Το σημείο στο οποίο τέμνονται οι τρεις διάμεσοι ενός τριγώνου λέγεται ………. ……………… του τριγώνου.

β. Το μέτρο εγγεγραμμένης γωνίας που βαίνει σε τεταρτοκύκλιο είναι ……….. μοίρες. **(Απ.: α. βαρύκεντρο, β. 45)**

6. *Να αντιστοιχίσετε κάθε στοιχείο της στήλης (A) με όλα εκείνα τα στοιχεία της στήλης (B) με τα οποία ταιριάζει.*

Στήλη (A)	Στήλη (B)
α. ΕΓΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ	**1. Σημείο τομής των τριών μεσοκαθέτων του τριγώνου**

β. ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ	**2. Σημείο τομής των τριών υψών του τριγώνου**
γ. ΠΕΡΙΚΕΝΤΡΟ ΤΡΙΓΩΝΟΥ	**3. Σημείο τομής των τριών διχοτόμων του τριγώνου**
	4. Σημείο τομής των τριών διαμέσων του τριγώνου
	5. Κέντρο περιγεγραμμένου κύκλου τριγ.
	6. Κέντρο εγγεγραμμένου κύκλου τριγ.

(Απ.: α $\to$ 3, 6 β $\to$ 4, γ $\to$ 1,5)

7. *Να κυκλώσετε το (Σ) αν είναι σωστή ή το (Λ) αν είναι λάθος κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις.*

α. Οι διχοτόμοι δύο εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών είναι μεταξύ τους κάθετες. Σ Λ

β. Κάθε ευθεία κάθετη στην ακτίνα στο σημείο που τέμνει τον κύκλο είναι εφαπτόμενή του. Σ Λ

γ. Σε δύο άνισες χορδές του ίδιου κύκλου αντιστοιχούν ομοιότροπα άνισα αποστήματα. Σ Λ

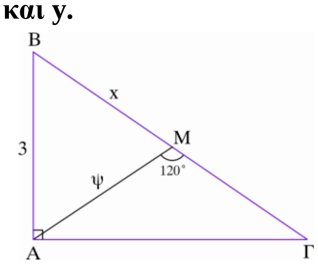
δ. Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα αν έχουν την υποτείνουσα και μια οξεία γωνία ίση. Σ Λ

ε. Δύο γωνίες τριγώνου μπορεί να είναι παραπληρωματικές. Σ Λ

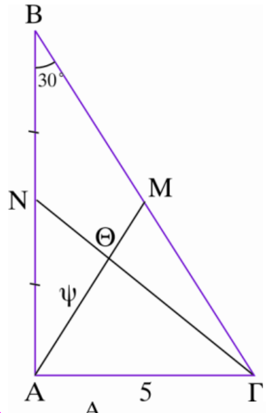
(Απ.: α $\to$ Σ, β $\to$ Σ, γ $\to$ Λ, δ $\to$ Σ, ε $\to$ Λ)

8. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα x και y.

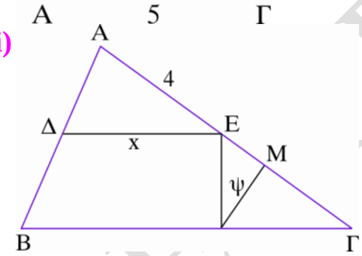
i)



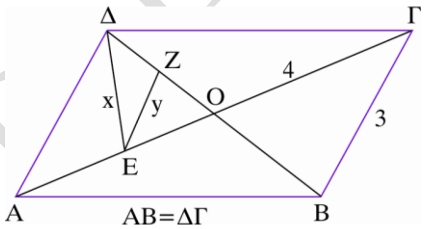
ii)



iii)

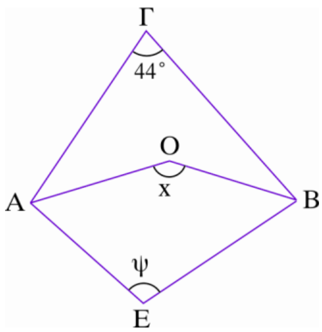


iv)



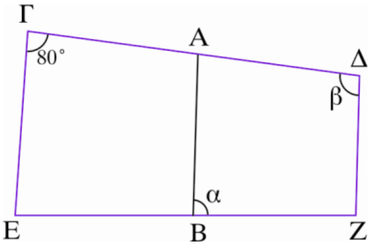
(Απ. i) x = y = 3, ii) x = 5, y = $\frac{10}{3}$, iii) x = 5, y = 2 iv) x = 2, y = $\frac{3}{2}$

9. α. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες x και y.



β. i. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τις γωνίες α και β.

ii. Να δείξετε ότι: ΓΕ // ΔΖ.



Λύση

α. $\hat{x} = 2\cdot 44^\circ = 88^\circ$, $\hat{\psi} = 180^\circ - 44^\circ = 136^\circ$.

β. i. $\alpha = 80°$, $\beta = 180° - 80° = 100°$

ii. Επειδή $\hat{\Gamma}, \hat{\Delta}$ παραπληρωματικές και οι γωνίες αυτές είναι εντός και επί τα αυτά των ευθειών ΕΓ και ΔΖ που τέμνονται από την ΓΔ, θα είναι ΕΓ//ΔΖ.

10. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ και ΑΒ < ΓΔ. Φέρνουμε τη μεσοκάθετο ΕΖ (Ε μέσο του ΒΓ) του ΒΓ που τέμνει τη ΔΓ στο Ζ. Γνωρίζουμε επίσης ότι: $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$.

α. Υπολογίστε τις γωνίες $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τραπεζίου.

β. Αποδείξτε ότι το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ορθογώνιο ισοσκελές.

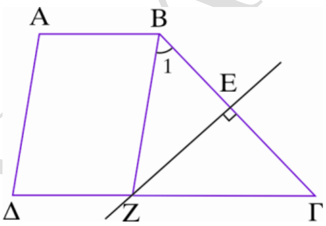
Λύση

α. Ισχύει: $\hat{B} = 3\hat{\Gamma}$. Όμως: $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180^\circ$.

Άρα: $4\Gamma = 180^\circ \Leftrightarrow \hat{\Gamma} = 45^\circ$.

Άρα: $\hat{B} = 135^\circ$.

β. Επειδή ΖΕ μεσοκάθετος του ΒΓ, το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ισοσκελές.



Άρα: ΒΖ = ΖΓ και $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma} = 45^\circ$.

Άρα: $B\hat{Z}\Gamma = 180^\circ - 2\cdot 45^\circ = 90^\circ$.

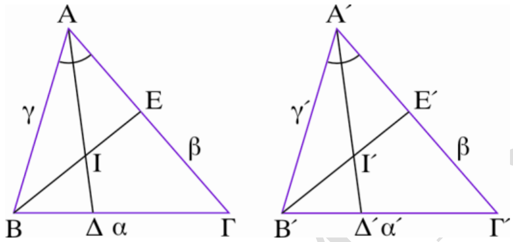
Επομένως: Το τρίγωνο ΒΖΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.

11. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν β = β΄, γ = γ΄ και $\hat{A} = \hat{A}'$. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ και Ι΄ το σημείο τομής των διχοτόμων Α΄Δ΄ και Β΄Ε΄ του Α΄Β΄Γ΄ να αποδείξετε ότι:

i. ΑΔ = Α΄Δ΄ και ΒΕ = Β΄Ε΄

ii. ΑΙ = Α΄Ι΄ και ΒΙ = Β΄Ι΄

Λύση



i. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα (Π-Γ-Π).

Άρα: $\hat{B} = \hat{B}' \Rightarrow \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{B}'}{2}$.

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α΄Β΄Δ΄ έχουν:

ΑΒ = Α΄Β΄, $B\hat{A}\Delta = B'\hat{A}'\Delta' \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}'}{2}$ και

$\hat{B} = \hat{B}'$. Άρα (Γ-Π-Γ) είναι ίσα.

Επομένως: ΑΔ = Α΄Δ΄. Ομοίως: ΒΕ = Β΄Ε΄.

ii. Τα τρίγωνα ΑΒΙ και Α΄Β΄Ι΄ έχουν:

ΑΒ = Α΄Β΄, $B\hat{A}I = B'\hat{A}'I' \Leftrightarrow \frac{\hat{A}}{2} = \frac{\hat{A}'}{2}$ και

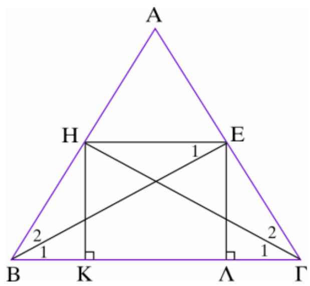
$A\hat{B}I = A'\hat{B}'I' \Leftrightarrow \frac{\hat{B}}{2} = \frac{\hat{B}'}{2}$.

Άρα (Γ-Π-Γ) είναι ίσα.

Επομένως: ΑΙ = Α΄Ι΄ και ΒΙ = Β΄Ι΄.

12. Να αποδειχθεί αν η ευθεία που ενώνει τα ίχνη των διχοτόμων των γωνιών Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ είναι παράλληλη προς την ΒΓ, τότε τρίγωνο είναι ισοσκελές.

Λύση



Έστω Ε και Η τα ίχνη των διχοτόμων των γωνιών Β και Γ στις πλευρές ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Επειδή ΗΕ // ΒΓ θα ισχύει:

$B_1 = E_1 = B_2$.

Άρα το τρίγωνο ΗΒΕ ισοσκελές.
Άρα: ΒΗ = ΗΕ.
Ομοίως: Το τρίγωνο ΗΕΓ ισοσκελές.
Άρα: ΗΕ = ΕΓ
Επομένως: ΒΗ = ΓΕ
Έστω ΗΚ = ΕΛ οι κάθετες από τα Η και Ε στην ΒΓ.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΗΚΒ και ΕΛΓ έχουν: ΒΗ = ΕΓ και ΗΚ = ΕΛ (αποστάσεις παραλλήλων). Άρα: είναι ίσα οπότε $\mathrm{B}=\Gamma$.
Άρα το τρίγωνο ΑΒΓ ισοσκελές.

13. **Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΒΓ και από τα δύο μέρη αυτής κατά ΒΕ = ΑΒ και ΓΖ = ΓΔ. Να δειχθεί ότι οι ΕΑ και ΖΔ τέμνονται κάθετα.**

Λύση

Στο τρίγωνο ΑΒΕ έχουμε: $\hat{\mathrm{B}}_1=\hat{\mathrm{A}}_1+\hat{\mathrm{E}}$ ($\hat{\mathrm{B}}_1$ εξωτερική.) Όμως το τρίγωνο ΑΒΕ ισοσκελές.

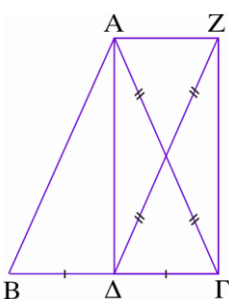
Άρα: $\hat{\mathrm{A}}_1=\hat{\mathrm{E}}_1$, οπότε $\hat{\mathrm{E}}=\dfrac{\hat{\mathrm{B}}_1}{2}$.

Ομοίως: $\hat{\mathrm{Z}}=\dfrac{\hat{\Gamma}_1}{2}$. Όμως $\hat{\mathrm{B}}_1$, $\hat{\Gamma}_1$: παραπληρωματικές

Άρα: $\hat{\mathrm{E}}+\hat{\mathrm{Z}}=\dfrac{\hat{\mathrm{B}}_1+\hat{\Gamma}_1}{2}=\dfrac{180}{2}=90°$. Στο τρίγωνο ΕΚΖ ισχύει: $\hat{\mathrm{E}}+\hat{\mathrm{Z}}+\hat{\mathrm{K}}=180° \Leftrightarrow \hat{\mathrm{K}}=90°$ οπότε $\mathrm{EK}\perp\mathrm{ZK}$.

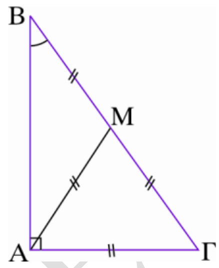
14. **α. Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}=90^\circ$ και $\hat{\mathrm{B}}=30^\circ$ φέρνουμε τη διάμεσο ΑΜ. Σε τι είδους τρίγωνα χωρίζεται το ΑΒΓ και γιατί;**

β. Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με ΑΒ = ΑΓ. Το Δ είναι το μέσο της ΒΓ και το Ε της ΑΓ και ΔΕ = ΕΖ. Να δείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΖΓΔ είναι ορθογώνιο.



Λύση

α. Ισχύει:
$\mathrm{AM}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}=\mathrm{MB}=\mathrm{M\Gamma}$.
Όμως $\mathrm{A\Gamma}=\dfrac{\mathrm{B\Gamma}}{2}$. Άρα: το ΑΜΓ είναι ισόπλευρο και το ΑΜΒ είναι ισοσκελές.

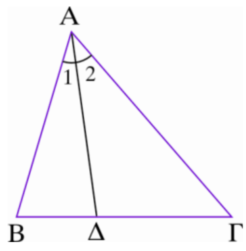


β. Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η διάμεσος ΑΔ είναι και ύψος. Άρα το τρίγωνο ΑΔΓ είναι ορθογώνιο στο οποίο η ΔΕ είναι διάμεσος.
Άρα: $\Delta\mathrm{E}=\dfrac{\mathrm{A\Gamma}}{2}$. Όμως $\Delta\mathrm{E}=\dfrac{\Delta\mathrm{Z}}{2}$. Άρα το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι κατ' αρχήν παραλληλόγραμμο αφού οι διαγώνιοι του διχοτομούνται. Όμως ΔΖ = ΑΓ άρα το ΑΔΓΖ είναι ορθογώνιο, αφού έχει ίσες διαγωνίους.

15. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{B}}>\hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος τους ΑΔ. Να αποδείξετε ότι:**
i. $\mathbf{A\hat{\Delta}\Gamma-A\hat{\Delta}B=\hat{B}-\hat{\Gamma}}$
ii. $\mathbf{A\hat{\Delta}B=90^\circ-\dfrac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}}$, $\mathbf{A\hat{\Delta}\Gamma=90^\circ+\dfrac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}}$.

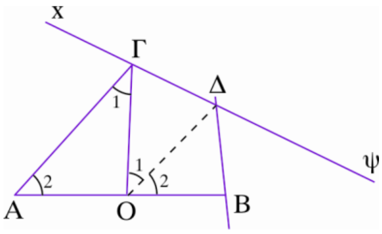
Λύση

i. $\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma-\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}=\left(\hat{\mathrm{A}}_1+\hat{\mathrm{B}}\right)-\left(\hat{\mathrm{A}}_2+\hat{\Gamma}\right)=\hat{\mathrm{B}}-\hat{\Gamma}$ (1)



ii. $\mathrm{A}\hat{\Delta}\mathrm{B}+\mathrm{A}\hat{\Delta}\Gamma=180^\circ$ (2) (παραπληρωματικές).
Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) έχουμε το ζητούμενο!

16. **Στο παρακάτω σχήμα η xΓy είναι εφαπτόμενη στον κύκλο (Ο, R) και ΟΔ // ΑΓ. Δείξτε ότι η ΔΒ εφάπτεται στον (Ο, R).**



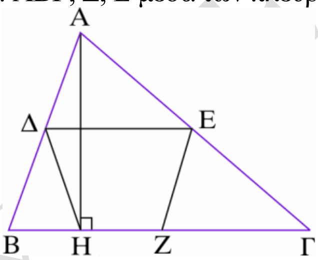
Λύση

ΟΔ//ΑΓ. Άρα: $\hat{O}_1 = \hat{\Gamma}_1$ (εντός εναλλάξ), $\hat{O}_2 = \hat{A}_2$ (εντός εκτός επί τα αυτά).
Όμως: $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_2$ (ΟΑ = ΟΓ)
Άρα: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Τα τρίγωνα ΟΓΔ και ΟΒΔ έχουν: ΟΔ κοινή, $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, ΟΓ = ΟΒ (ακτίνες).
Άρα (Π-Γ-Π) είναι ίσα
Επομένως: $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 90^\circ$. Άρα $\Delta B \perp OB$.
Άρα η ΔΒ εφαπτόμενη του κύκλου στο Β ως κάθετη στο άκρο της ακτίνας ΟΒ.

17. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρνουμε το ύψος ΑΗ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να δειχθεί ότι ΔΗΖΕ ισοσκελές τραπέζιο.

Λύση

- Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΗΒ, ΗΔ διάμεσος. Άρα $\Delta H = \dfrac{AB}{2}$ (1)
- Στο τρίγ. ΑΒΓ, Ζ, Ε μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΓ.



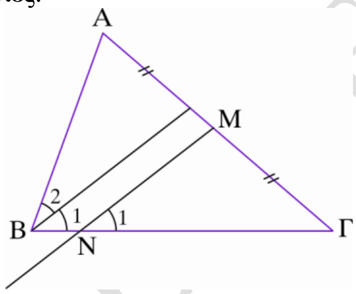
Άρα $EZ = \dfrac{AB}{2}$ (2).
Από (1), (2) προκύπτει ότι: ΔΗ = ΕΖ
- Στο τρίγωνο ΑΒΓ, Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ

Άρα ΔΕ // ΒΓ δηλαδή ΔΕ // ΗΖ.
Επομένως: Το τετράπλευρο ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

18. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$. Από το μέσο Μ της ΑΓ φέρνουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο ΒΔ της γωνίας Β που τέμνει τη ΒΓ στο Ν. Δείξτε ότι:
α) Το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές.
β) Το τρίγωνο ΑΝΓ είναι ορθογώνιο στο Ν.

Λύση

α) Ισχύει $\hat{B}_1 = \hat{B}_2 = \dfrac{\hat{B}}{2} = \dfrac{2\cdot\hat{\Gamma}}{2} = \hat{\Gamma}$
Όμως $\hat{N}_1 = \hat{B}_1 = \hat{\Gamma}$. Άρα το τρίγωνο ΜΝΓ είναι ισοσκελές.

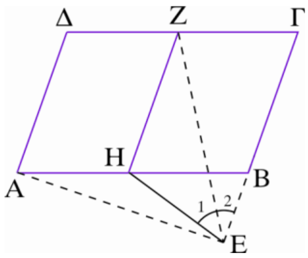


β) $MN = M\Gamma$ (ερώτ. α) $= \dfrac{A\Gamma}{2}$
Άρα: στο τρίγωνο ΑΝΓ η διάμεσος ΝΜ ισούται με το μισό της πλευράς που άγεται.
Άρα το τρίγωνο ΑΝΓ είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα τη πλευρά ΑΓ.

19. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB = 2\cdot B\Gamma$ και $\hat{B} > 90^\circ$. Φέρνουμε τμήμα $AE \perp B\Gamma$ (το Ε βρίσκεται στη προέκταση του ΒΓ) και έστω Ζ το μέσο του ΓΔ και Η το μέσο του ΑΒ. Να δείξετε ότι:
α) Το ΗΒΓΖ είναι ρόμβος.
β) ΗΖ = ΗΕ = ΗΒ
γ) Η ΕΖ είναι διχοτόμος της γωνίας ΗΕΓ.

Λύση

α) Το ΗΒΓΖ παρ/μο αφού $HB \overset{//}{=} Z\Gamma$ $\left(\Leftrightarrow \dfrac{AB}{2} \overset{//}{=} \dfrac{\Gamma\Delta}{2}\right)$
Άρα: ΗΖ = ΒΓ. Όμως $B\Gamma = \dfrac{\Delta\Gamma}{2} = Z\Gamma$.
Επομένως: το ΗΒΓΖ ρόμβος.



β) Στο ορθ. Τρίγωνο ΑΕΒ η ΕΗ διάμεσος.

Άρα $ΕΗ = \frac{ΑΒ}{2} = ΗΒ = ΗΖ$

γ) $\hat{Ε}_1 = Η\hat{Z}Ε$ ($Ε\overset{\triangle}{Η}Ζ$ ισοσκελές), $\hat{Ε}_2 = Η\hat{Z}Ε$ (εντός εναλλάξ των παραλλήλων ΗΖ // ΕΓ τεμνομένες από την $Ε_2$) Άρα $\hat{Ε}_1 = \hat{Ε}_2$.

20. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Δ το μέσο της ΒΓ. Φέρνουμε $ΔΕ \perp ΑΓ$. Αν Ζ το μέσο του ΕΓ ν' αποδείξετε ότι:

i) ΔΖ // ΒΕ

ii) Αν Η μέσο του ΔΕ τότε $ΖΗ \perp ΑΔ$.

iii) $ΑΗ \perp ΒΕ$

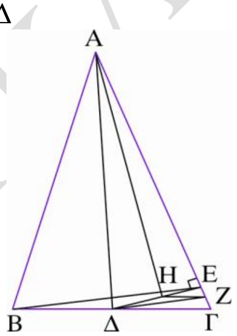
Λύση

i) Στο τρίγωνο ΒΕΓ, Δ μέσο της ΒΓ, Ζ μέσο της ΕΓ. Άρα $ΔΕ \overset{//}{=} \frac{ΒΕ}{2}$.

ii) Στο τρίγωνο ΔΕΓ, Ζ μέσο της ΕΓ, Η μέσο της ΔΕ. Άρα $ΖΗ \overset{//}{=} \frac{ΔΓ}{2}$. Όμως: $ΑΔ \perp ΔΓ$.

(αφού στο ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος στη βάση του είναι και ύψος σ' αυτήν)

Άρα $ΖΗ \perp ΑΔ$



iii) Στο τρίγωνο ΑΔΖ, έχουμε:

- ΔΕ ύψος στη πλευρά ΑΖ (Αφού $ΔΕ \perp ΑΖ$)
- ΖΗ ύψος στην ΑΔ (αφού $ΖΗ \perp ΑΔ$)

  Άρα το σημείο Η είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΔΖ. Άρα το ΑΗ είναι το τρίτο ύψος του. Άρα $ΑΗ \perp ΔΖ$, άρα $ΑΗ \perp ΒΕ$

21. Σε ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ οι βάσεις ΑΒ και ΓΔ έχουν μήκη ΑΒ = α, ΓΔ = 3α και $\hat{Γ} = 60^\circ$. Φέρνουμε τα ύψη του τραπεζίου ΑΕ και ΒΖ.

α) Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ είναι ίσα.

β) Να βρείτε τα μήκη των ΔΕ και ΖΓ ως συνάρτηση του α.

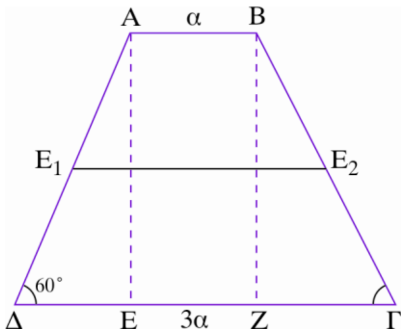
γ) Υποθέτουμε οι πλευρές του παραπάνω τραπεζίου είναι δρόμοι που συνδέσουν τα χωρία Α, Β, Γ και Δ και έχουν συνολικό μήκος 80 Km. Στο μέσο του δρόμου ΑΔ υπάρχει ένα εκκλησάκι $Ε_1$ και στο μέσο του δρόμου ΒΓ υπάρχει ένα άλλο εκκλησάκι $Ε_2$.

i) Πόσα χιλιόμετρα απέχουν τα εκκλησάκια $Ε_1$, $Ε_2$ από τα χωριά Α και Β αντίστοιχα;

ii) Πόσο θα στοιχίσει η διάνοιξη ενός ευθύγραμμου δρόμου που θα συνδέει απευθείας τα εκκλησάκια $Ε_1$ και $Ε_2$, αν υποθέσουμε ότι ένα χιλιόμετρο δρόμου κοστίζει 500€.

Λύση

α) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΖΓ έχουν ΑΕ = ΒΖ (αποστάσεις παρ/λων), ΑΔ = ΒΓ (ισοσκελές τραπέζιο). Άρα είναι ίσα οπότε ΔΕ = ΖΓ.



β) ΕΖ = α (ΑΒΖΕ ορθογώνιο) Άρα:

$ΔΓ = 3α \Leftrightarrow ΔΕ + α + 2Γ = 3α \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cdot ΔΕ = 2α \Leftrightarrow ΔΕ = α$.

Άρα ΔΕ = ΖΓ = α.

γ) ΑΒ + ΒΓ + ΓΔ + ΔΑ = 80

$\Leftrightarrow α + ΑΔ + 3α + ΔΑ = 80 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2 \cdot ΑΔ + 4α = 80 \quad (1)$

Όμως στο ορθογώνιο ΑΔΕ έχουμε $\Delta = 60°$

Άρα $\Delta E = \frac{A\Delta}{2}$ ή $A\Delta = 2 \cdot \Delta E = 2\alpha$ (2)

Από (1), (2) έχουμε: $8\alpha = 80 \Leftrightarrow \alpha = 10Km$

i) $AE_1 = BE_2 = \frac{A\Delta}{2} = 10Km$

ii) $E_1E_2 = \frac{AB + \Delta\Gamma}{2}$ (διάμεσος τραπεζίου)

Άρα: $E_1E_2 = 20Km$

Οπότε το κόστος θα είναι $20 \cdot 500 = 10.000$ €

22. Σ' ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ το σημείο Ε είναι συμμετρικό του σημείου Β ως προς το Δ. Αν Ζ είναι το μέσο της ΑΔ και το σημείο Η είναι η τομή των ΑΕ και ΓΔ, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta H = \frac{AB}{2}$

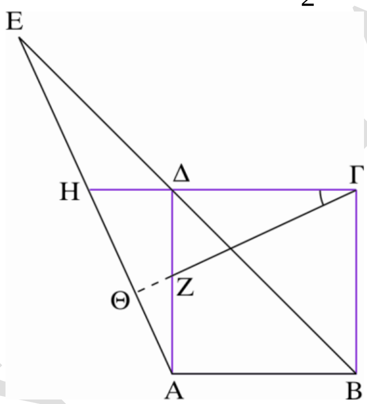
β) Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΓΔ είναι ίσα.

γ) Η ΓΖ είναι κάθετη στην ΑΕ.

Λύση

α) Στο τρίγωνο ΑΕΒ, Δ μέσο του ΕΒ και ΔΗ // ΑΒ.

Άρα Η μέσο της ΕΑ και $\Delta H = \frac{AB}{2}$



β) Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΗ και ΖΔΓ έχουν ΔΗ = ΔΖ και ΑΔ = ΔΓ. Άρα είναι ίσα οπότε $\Delta\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{A}H$.

γ) Αν Θ το σημείο που η ΓΖ τέμνει την ΑΕ, έχουμε: $\Theta\hat{A}Z + A\hat{Z}\Theta = \Delta\hat{\Gamma}Z + \Delta\hat{Z}\Gamma = 90^\circ$

($A\hat{Z}\Theta = \Delta\hat{Z}\Gamma$ ως κατακορυφήν)

Άρα: $\Gamma Z \perp AE$.

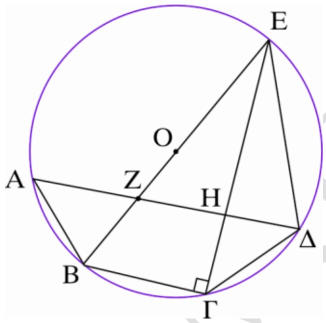
23. Σε κύκλο (Ο, R) παίρνουμε τρεις χορδές ΑΒ=ΒΓ=ΓΔ. Αν η διάμετρος ΒΕ τέμνει την ΑΔ στο Ζ να δείξετε ότι:

α) ΑΔ//ΒΓ

β) $A\Delta \perp \Gamma E$

γ) Η ΓΕ τέμνει την ΖΔ στο μέσο.

Λύση



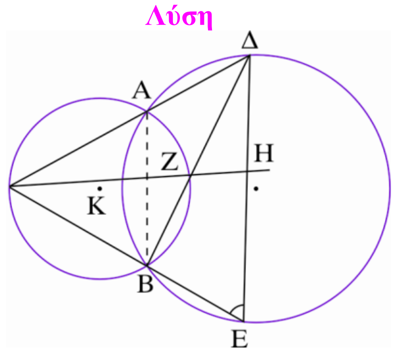
α) ΑΔ//ΒΓ (χορδές μεταξύ ίσων τόξων: $AB = \Gamma\Delta$ είναι παράλληλες: Σχόλιο Σχολ. Βιβλ.).

β) $B\hat{\Gamma}E = 90^\circ$ ως εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο. Άρα: $B\Gamma \perp \Gamma E$. Επειδή ΑΔ//ΒΓ, θα είναι $A\Delta \perp \Gamma E$.

γ) Αν Η η τομή της ΓΕ με την ΖΔ, στο τρίγωνο ΖΔΕ η ΕΗ είναι ύψος στην ΖΔ αλλά και διχοτόμος αφού $B\hat{E}\Gamma = \Gamma\hat{E}\Delta$ ως εγγεγραμμένες σε ίσα τόξα. Άρα το τρίγωνο ΖΕΔ είναι ισοσκελές, οπότε η ΕΗ είναι και διάμεσος δηλ. η ΓΕ τέμνει την ΖΔ στο μέσο.

24. Δίνονται δύο κύκλοι (Κ, α) και (Ο, β) που τέμνονται στα Α, Β. Από τυχαίο σημείο Γ του (Κ, α) φέρνουμε την τέμνουσα ΓΑΔ. Αν Ε η τομή την ΓΒ και (Ο, β), Ζ η τομή των ΔΒ και (Κ, α) και Η η τομή των ΓΖ και ΔΕ, τότε το ΖΒΕΗ είναι εγγράψιμο.

Λύση



Έστω ΑΒ η κοινή χορδή των δύο κύκλων.

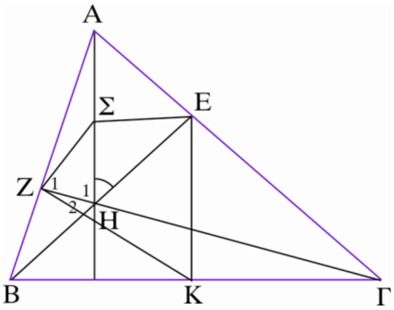
Έχουμε: $\Gamma\hat{A}B = \Gamma\hat{Z}B$ (ως εγγεγραμμένες στο ΓB).

Επίσης το τετράπλευρο ΑΒΕΔ είναι εγγεγραμμένο στον κύκλο (Ο, β). Άρα: $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta = \Gamma\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$
Άρα: $\mathrm{B}\hat{\mathrm{E}}\Delta = \Gamma\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{B}$ οπότε το τετράπλευρο ΖΒΕΗ είναι εγγράψιμο.

25. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη ΒΕ και ΓΖ αυτού. Αν Η το ορθόκεντρο του τριγώνου και Σ, Κ τα μέσα των ΑΗ, ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΖΣΕ είναι εγγράψιμο.

Λύση

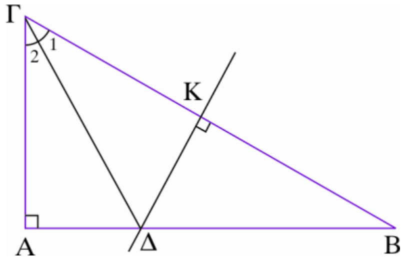
Αφού Η ορθόκεντρο θα έχουμε $\mathrm{AH} \perp \mathrm{B}\Gamma$.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΖΗ, ΖΣ διάμεσος προς την υποτείνουσα.
Άρα: $\hat{\mathrm{Z}}_1 = \hat{\mathrm{H}}_1 = 90 - \hat{\Gamma}_1$.



Επίσης στο ορθογώνιο τρίγωνο ΒΖΓ, ΖΚ διάμεσος προς την υποτείνουσα.
Άρα: $\hat{\mathrm{Z}}_2 = \hat{\Gamma}_1$.
Επομένως: $\hat{\mathrm{Z}}_1 = 90° - \hat{\mathrm{Z}}_2 \Leftrightarrow \hat{\mathrm{Z}}_1 + \hat{\mathrm{Z}}_2 = 90°$
$\Leftrightarrow \Sigma\hat{\mathrm{Z}}\mathrm{K} = 90°$ (1)
Με όμοιο τρόπο στα ορθογώνια τρίγωνα ΑΕΗ και ΒΕΓ έχουμε: $\Sigma\hat{\mathrm{E}}\mathrm{K}$ =90° (2).
Από (1), (2) προκύπτει ότι: Το ΚΖΣΕ είναι εγγράψιμο.

26. Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{\mathrm{A}}$ =90° είναι $\hat{\Gamma}$ =2$\hat{\mathrm{B}}$. Στο μέσο Κ της υποτείνουσας ΒΓ φέρνουμε μια ευθεία κάθετη στην ΒΓ που τέμνει την ΑΒ στο σημείο Δ. Να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΔΒΚ είναι ίσα.

Λύση



Αφού $\hat{\Gamma}$ =2Β έχουμε $\hat{\mathrm{B}}$ =30° και $\hat{\Gamma}$ =60° (γιατί;). Επειδή ΚΔ μεσοκάθετος του ΒΓ θα ισχύει ΔΒ = ΔΓ. Άρα: Το τρίγωνο ΓΔΒ ισοσκελές, οπότε $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\mathrm{B}} = \dfrac{\hat{\Gamma}}{2}$. Άρα: $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$.
Επομένως ΓΔ διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$.
Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΔΓ και ΔΚΒ έχουν: $\hat{\Gamma}_2 = \hat{\mathrm{B}}$, ΓΔ = ΔΒ. Άρα είναι ίσα!