ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ 2019

ΘΕΜΑ Α

Α.1 α)

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ονομάζουμε **πραγματική συνάρτηση** με **πεδίο ορισμού το** A μια διαδικασία (κανόνα) f, με την οποία κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο πραγματικό αριθμό y. Το y ονομάζεται **τιμή της** f **στο** x και συμβολίζεται με $f(x)$.

β) i) Μια συνάρτηση $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ έχει αντίστροφη αν είναι «1-1»

ii) ***Αντίστροφη συνάρτηση***

- Έστω μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$. Αν υποθέσουμε ότι αυτή είναι 1–1, τότε για κάθε στοιχείο y του συνόλου τιμών, $f(A)$, της f υπάρχει μοναδικό στοιχείο x του πεδίου ορισμού της A για το οποίο ισχύει $f(x) = y$. Επομένως ορίζεται μια συνάρτηση

$$g: f(A) \to \mathbb{R}$$

με την οποία κάθε $y \in f(A)$ αντιστοιχίζεται στο μοναδικό $x \in A$ για το οποίο ισχύει $f(x) = y$.

Δηλαδή η αντίστροφη συνάρτηση ορίζεται ως εξής:
$f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$, με $f^{-1}(y) = x$ αν και μόνο αν $f(x) = y$

Α.2. **ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat)**

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ και x_0 ένα **εσωτερικό** σημείο του Δ. Αν η f παρουσιάζει **τοπικό ακρότατο** στο x_0 και είναι **παραγωγίσιμη** στο σημείο αυτό, τότε:

$$f'(x_0) = 0$$

Α.3 **ΑΠΟΔΕΙΞΗ**

- Αποδεικνύουμε το θεώρημα στην περίπτωση που είναι $f'(x) > 0$.

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$. Θα δείξουμε ότι $f(x_1) < f(x_2)$. Πράγματι, στο διάστημα $[x_1, x_2]$ η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ. Επομένως, υπάρχει $\xi \in (x_1, x_2)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi) = \dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, οπότε έχουμε

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Επειδή $f'(\xi) > 0$ και $x_2 - x_1 > 0$, έχουμε $f(x_2) - f(x_1) > 0$, οπότε $f(x_1) < f(x_2)$.

Α.4 α) ΛΑΘΟΣ

π.χ. Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}-1 & ,x<0\\ 1 & ,x>0\end{cases}$. Η συνάρτηση αυτή είναι παραγωγίσιμη στο $A=(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ με $f'(x)=0$ για κάθε $x\in A$. Όμως η f δεν είναι σταθερή στο A αφού παίρνει δύο διαφορετικές τιμές.

Άλλωστε η πρόταση δεν ισχύει σε ένωση διαστημάτων (σελίδα 134, σχόλιο σχολικού βιβλίου)

β) ΛΑΘΟΣ

π.χ. Για την συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3}{x} & ,x\neq 0\\ 1 & ,x=0\end{cases}$ ισχύει:

$$\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{x}=\lim_{x\to 0}x^2=0\neq f(0)=1$$

Άλλωστε η πρόταση ισχύει μόνο για συνεχείς συναρτήσεις

Α.5

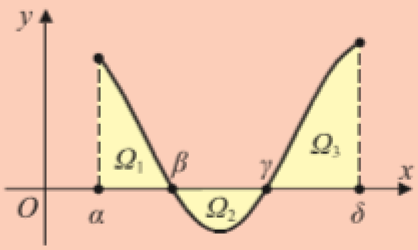
10. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος.
Αν

$E(\Omega_1)=2, E(\Omega_2)=1$ και $E(\Omega_3)=3$

τότε το $\int_\alpha^\delta f(x)dx$ είναι ίσο με

Α) 6, Β) −4, Γ) 4,

Δ) 0, Ε) 2.



(Ερώτηση 10 σελίδα 239 σχολικού βιβλίου)

Απάντηση: $\int_\alpha^\delta f(x)dx=E(\Omega_1)+(-E(\Omega_2))+E(\Omega_3)=2-1+3=4$. Άρα σωστό το Γ)

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Αφού η συνάρτηση f έχει την ευθεία $y=2$ οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$.

Άρα: $\lim_{x\to+\infty} f(x)=2 \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}(e^{-x}+\lambda)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2$. Άρα $f(x)=e^{-x}+2$

Β.2 Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=f(x)-x$ στο διάστημα $[2,3]$

- Η g είναι συνεχής στο $[2,3]$ ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- $g(2)=e^{-2}+2-2=\dfrac{1}{e^2}>0$, $g(3)=e^{-3}+2-3=\dfrac{1}{e^3}-1<0$

Από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(2,3)$ τέτοιο, ώστε $g(x_0)=0$ δηλαδή $f(x_0)-x_0=0$.

Αυτό όμως είναι μοναδικό αφού $g'(x)=f'(x)-1=-e^{-x}-1<0$, $x\in[2,3]\in\mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα οπότε είναι συνάρτηση «1-1», άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική.

Β.3 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -e^{-x} < 0$. Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα άρα και «1-1» στο $\mathbb{R}$, οπότε έχει αντίστροφη.

$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{-x} + 2 \Leftrightarrow e^{-x} = y - 2 \quad (1)$

- Αν $y - 2 \leq 0$ τότε η (1) είναι αδύνατη.
- Αν $y - 2 > 2$ τότε $(1) \Leftrightarrow -x = \ln(y-2) \Leftrightarrow x = -\ln(y-2)$.

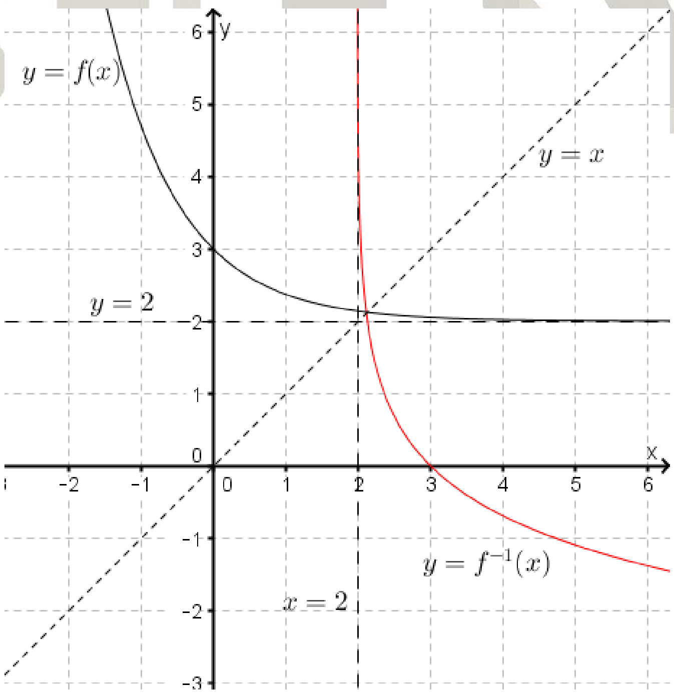
Επομένως για κάθε $y > 2$ η εξίσωση $y = f(x)$ έχει μοναδική λύση ως προς x με $x \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση f είναι «1-1» με σύνολο τιμών το $(2, +\infty)$

(Υπ' όψιν ότι το σύνολο τιμών θα μπορούσαμε να το βρούμε και ως εξής: Επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα και συνεχής στο $\mathbb{R}$, ισχύει: $f(A) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x), \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (2, +\infty)$, αφού $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^{-x} + 2\right) = 0 + 2 = 2$ και $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x} + 2\right) = +\infty$)

Άρα η αντίστροφη συνάρτηση της f είναι η $\boxed{f^{-1}(x) = -\ln(x-2)}$, $x > 2$

Β.4 $\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(-\ln(x-2)\right) \underset{u_0 = \lim_{x\to 2^+}(x-2) = 0}{\overset{u = x-2>0}{=}} \lim_{x\to 0^+}(-\ln u) = +\infty$. Άρα η ευθεία $x = 2$ είναι κατακόρυφος ασύμπτωτη της f. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = e^{-x} > 0$, άρα η f κυρτή στο $\mathbb{R}$

Η γραφική παράσταση της f^{-1} θα προκύψει από τη μετατόπιση του συμμετρικού σχήματος της $y = \ln x$ ως προς τον άξονα x΄x , οριζόντια κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά. Στη συνέχεια η γραφική παράσταση της f προκύπτει ως το συμμετρικό σχήμα της γραφικής παράστασης της f^{-1} ως προς την ευθεία $y = x$



ΘΕΜΑ Γ

Γ.1

- Η f είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής στο 1, άρα:

$\lim_{x\to 1^+}(x^2+\alpha)=\lim_{x\to 1^-}(e^{x-1}+\beta x)=f(1)\Leftrightarrow 1+\alpha=1+\beta\Leftrightarrow \alpha=\beta$.

Άρα: $f(x)=\begin{cases} x^2+\alpha & ,x\geq 1 \\ e^{x-1}+\alpha x & ,x<1\end{cases}$

- Η f παραγωγίσιμη στο 1, άρα:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2+\alpha-1-\alpha}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}+\alpha x-1-\alpha}{x-1}\Leftrightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{e^{x-1}-1}{x-1}+\alpha\right)\Leftrightarrow$$

$2=1+\alpha\Leftrightarrow\alpha=1$ διότι: $\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}\overset{\text{dlH}}{=}\lim_{x\to 1^-}\frac{e^{x-1}}{1}=e^0=1$.

Άρα: $\alpha=\beta=1$. Οπότε: $\boxed{f(x)=\begin{cases} x^2+1 & ,x\geq 1 \\ e^{x-1}+x & ,x<1\end{cases}}$

Γ.2 Για $x>1$, $f'(x)=2x>0$. Για $x<1$, $f'(x)=e^{x-1}>0$. Άρα $f'(x)>0$ για κάθε $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$. Όμως η f είναι συνεχής στο 1, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Οπότε το σύνολο τιμών της είναι: $f(A)=\left(\lim_{x\to-\infty}(e^{x-1}+x),\lim_{x\to+\infty}(x^2+1)\right)=(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

Γ.3 i) Επειδή $0\in f(A)$ η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο $\mathbb{R}$ μια ρίζα που είναι και μοναδική στο $\mathbb{R}$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1-1». Όμως $f(0)=\frac{1}{e}$ οπότε η ρίζα είναι αρνητική αφού, $f(0)=\frac{1}{e}>0=f(x_0)\Rightarrow 0>x_0$

Στο ίδιο συμπέρασμα θα καταλήγαμε αν εφαρμόζαμε θ. Bolzano στην f στο διάστημα $[-1,0]$, αφού η f είναι συνεχής στο $[-1,0]\subseteq\mathbb{R}$ και $f(0)=\frac{1}{e}>0$ και $f(-1)=\frac{1}{e^2}-1=\frac{1-e^2}{e^2}<0$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον μια ρίζα της f στο $(-1,0)$ που είναι μοναδική στο $\mathbb{R}$ αφού η f είναι γνησίως αύξουσα άρα και «1-1».

ii) $f^2(x)-x_0f(x)=0\Leftrightarrow f(x)(f(x)-x_0)=0\Leftrightarrow f(x)=0$ ή $f(x)=x_0$

Η εξίσωση $f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$ αφού μοναδική ρίζα έχει το x_0

Η εξίσωση $f(x)=x_0$ είναι αδύνατη στο $[1,+\infty)$ αφού για κάθε $x\geq 1$ ισχύει: $f(x)=x^2+1>1>0$

Αρκεί να δείξουμε λοιπόν ότι η εξίσωση $f(x)=x_0$ είναι αδύνατη και στο $(x_0,1)$. Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ άρα και στο $[x_0,1]$, οπότε για κάθε $x\in(x_0,1)$ ισχύει: $x_0<x<1\Rightarrow f(x_0)<f(x)<f(1)\Rightarrow f(x)>0>x_0$

Εναλλακτικά, θα μπορούσαμε εργαστούμε ως εξής: Η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε ισχύει: $x>x_0\Rightarrow f(x)>f(x_0)\Rightarrow f(x)>0$. Επίσης $f^2(x)>0$ για $x>x_0$ και $-x_0f(x)>0$ αφού $x_0<0$. Άρα $f^2(x)-x_0f(x)>0$. Επομένως η εξίσωση $f^2(x)-x_0f(x)=0$ είναι αδύνατη στο $(x_0,+\infty)$

Γ.4

- $(MOK)=E(x)=\frac{1}{2}xf(x)=\frac{x(x^2+1)}{2}=\frac{x^3+x}{2}$, $x\geq 1$. Όμως $x=x(t)$. Άρα για κάθε χρονική στιγμή t ισχύει: $E(t)=\frac{x^3(t)+x(t)}{2}$
- $E'(t)=\left(\frac{x^3(t)+x(t)}{2}\right)'=\frac{1}{2}\left[3(x(t))^2x'(t)+x'(t)\right]=\frac{1}{2}\left[x'(t)\left(3(x(t))^2+1\right)\right]$
- Για $t=t_0$, $E'(t_0)=\frac{1}{2}\left[x'(t_0)\left(3(x(t_0))^2+1\right)\right]=\frac{1}{2}(2\cdot(3\cdot 9+1))=28$ τ.μ. ανά sec.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}+\alpha$

Η ευθεία $y=-x+2$ είναι εφαπτόμενη της C_f στο $A(1,1)$. Άρα $f(1)=1$ και $f'(1)=-1$

$f'(1)=-1\Leftrightarrow\alpha=-1$, $f(1)=1\Leftrightarrow\alpha+\beta=1$. Άρα $\beta=2$.

Επομένως: $\boxed{f(x)=(x-1)\ln(x^2-2x+2)-x+2}$ και $f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1$

Δ.2 Αν E το ζητούμενο εμβαδόν θα ισχύει:

$$E=\int_1^2\left|f(x)-(-x+2)\right|dx=\int_1^2\left|(x-1)\ln(x^2-2x+2)\right|dx.$$

Για κάθε $x\in[0,1]$, $x-1\geq 0$ ενώ $\ln(x^2-2x+2)=\ln\left[(x-1)^2+1\right]\geq\ln 1=0$

Άρα:

$$E=\int_1^2(x-1)\ln(x^2-2x+2)dx\underset{du=2(x-1)dx}{\overset{u=x^2-2x+2}{=}}\frac{1}{2}\int_1^2\ln u\,du=\frac{1}{2}\int_1^2u'\ln u=\frac{1}{2}\left([u\ln u]_1^2-\int_1^2 1du\right)=\ln 2-\frac{1}{2}\text{ τ.μ.}$$

Δ.3 i) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=\ln(x^2-2x+2)+\frac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1$.

$f'(x)\geq -1 \Leftarrow \ln\left(x^2-2x+2\right)+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}-1\geq -1 \Leftarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}\geq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού είναι άθροισμα δυο μη αρνητικών αριθμών, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x=1$.

ii) $$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\lambda\geq(\lambda-1)\ln\left(\lambda^2-2\lambda+2\right)+\frac{3}{2}\Leftarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+\cancel{\lambda}\geq f(\lambda)+\cancel{\lambda}-2+\frac{3}{2}\Leftarrow$$

$$\Leftarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)\geq f(\lambda)-\frac{1}{2}\Leftarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)\geq -\frac{1}{2}\Leftarrow \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}\geq -1.$$

Εφαρμόζοντας Θ.Μ.Τ. στο διάστημα $\left[\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right]$ προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in\left(\lambda,\lambda+\frac{1}{2}\right)$ τέτοιο, ώστε $f'(\xi)=\dfrac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}$. Όμως από το (i) ισχύει:

$$f'(\xi)\geq -1\Rightarrow \frac{f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}\geq -1$$

Δ.4 Έστω ότι υπάρχουν τα σημεία $A\left(x_1,f(x_1)\right)$ και $B\left(x_2,g(x_2)\right)$ και $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ οι εφαπτόμενες των C_f και C_g αντίστοιχα. Οι εξισώσεις των εφαπτομένων $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ είναι:
$\varepsilon_1: y=f'(x_1)x-x_1f'(x_1)+f(x_1)$ και $\varepsilon_2: y=g'(x_2)x-x_2g'(x_2)+g(x_2)$. Οι ευθείες $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ θα ταυτίζονται αν και μόνο αν: $f'(x_1)=g'(x_2)$ (1) και $-x_1f'(x_1)+f(x_1)=-x_2g'(x_2)+g(x_2)$ (2)
Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό ζεύγος αριθμών (x_1,x_2) ώστε να επαληθεύονται οι εξισώσεις (1) και (2). Ελέγχουμε αν η ευθεία $y=-x+2$ που είναι εφαπτόμενη στη C_f στο $A(1,1)$ είναι εφαπτόμενη στη C_g σε κάποιο σημείο $B\left(x_2,g(x_2)\right)$.
Πράγματι:
$(1)\Leftrightarrow g'(x_2)=f'(1)=-1\Leftrightarrow -3x_2{}^2-1=-1\Leftrightarrow x_2=0$ (μοναδική λύση). Για $x_1=1$ και $x_2=0$ επαληθεύεται και η (2): $-1f'(1)+f(1)=0g'(0)+g(0)\Leftrightarrow 2=g(0)$. Αρκεί να δείξουμε ότι η ευθεία αυτή είναι μοναδική! Ισχύει: $f'(x)\geq -1$ και $g'(x)=-3x^2-1\leq -1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Άρα η εξίσωση (1) αληθεύει αν και μόνο αν $f'(x)=-1$ και $g'(x)=-1$. Η εξίσωση $f'(x)=-1\Leftrightarrow \ln\left[(x-1)^2+1\right]+\dfrac{2(x-1)^2}{x^2-2x+2}=0$ έχει μοναδική ρίζα το $x_1=1$. Για την $g'(x)=-1$ έχουμε δείξει ότι έχει μοναδική ρίζα την $x_2=0$. Άρα η ευθεία $y=-x+2$ είναι η μοναδική κοινή εφαπτόμενη.

Επιμέλεια: Κώστας Βακαλόπουλος, Μαθηματικός MSc in Statistics