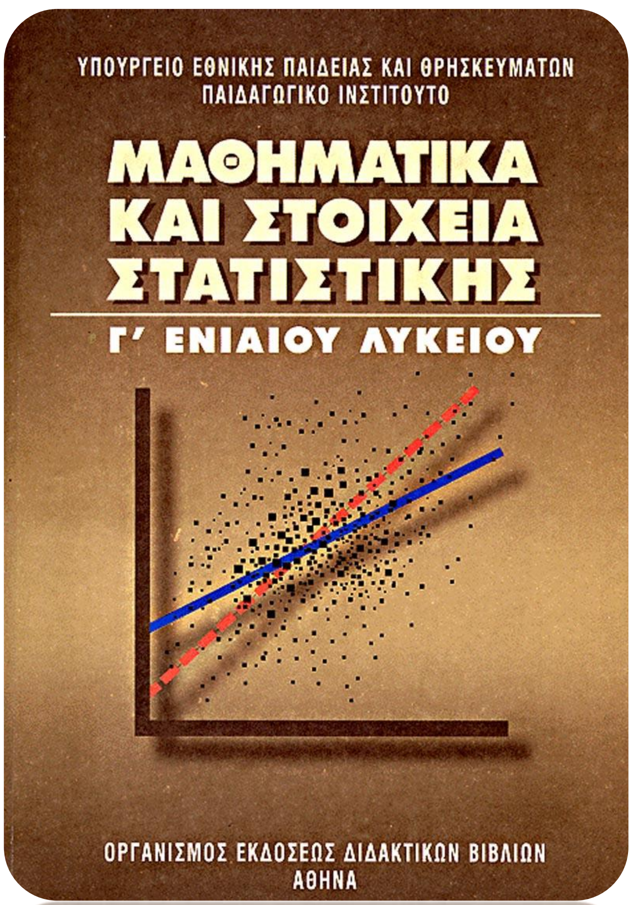
ΟΙ ΛΥΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Τετάρτη 10 – 06 – 15
20:10



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ
LISARI TEAM

ΘΕΜΑ Α
Μαρία Παπαδομανωλάκη

ΘΕΜΑ Β
ΑΝΔΡΕΑΣ ΜΑΝΩΛΗΣ
ΘΑΝΑΣΗΣ ΝΙΚΟΛΟΠΟΥΛΟΣ

ΘΕΜΑ Γ
Θεόδωρος Παγώνης
Χαράλαμπος Φιλιππίδης

ΘΕΜΑ Δ
Γιάννης Ζαμπέλης
Χρήστος Κουστέρης

ΣΥΝΤΟΝΙΣΜΟΣ
Μάκης Χατζόπουλος

ΘΕΜΑΤΑ ΚΑΙ ΛΥΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2015

Οι απαντήσεις και οι λύσεις

είναι αποτέλεσμα της συλλογικής δουλειάς

των συνεργατών του διαδικτυακού τόπου

http://lisari.blogspot.gr

4η έκδοση: 11 – 06 – 2015 *(συνεχής ανανέωση)*

Οι λύσεις διατίθεται **αποκλειστικά**

από το μαθηματικό blog

http://lisari.blogspot.gr

Πρόλογος

Στο παρόν αρχείο περιλαμβάνονται οι λύσεις των **Επαναληπτικών** Πανελλαδικών Εξετάσεων στο μάθημα **Μαθηματικά και Στοιχεία Στατιστικής**. Η παρουσίαση των λύσεων είναι πλήρης και αναλυτική στο μέγιστο δυνατό, προκειμένου οι μαθητές να μπορούν να μελετήσουν και να επεξεργαστούν εύκολα το αρχείο.

Η εργασία αυτή εκπονήθηκε αποκλειστικά από τη γνωστή **διαδικτυακή ομάδα Μαθηματικών** από διάφορα μέρη της Ελλάδος, τη **lisari team. Προσπάθησαν και τα κατάφεραν να δώσουν πρώτοι διαδικτυακά τις πλήρεις λύσεις σε ένα αρχείο pdf!!**

Την αρχική συγγραφή των λύσεων ακολούθησαν ενδελεχείς έλεγχοι, διορθώσεις και βελτιώσεις με στόχο μια **πληρέστερη και πιο ποιοτική παρουσίαση**. Ζητούμε συγνώμη για τυχόν παραλείψεις, λάθη ή αστοχίες που ενδεχομένως θα έχουν διαφύγει της προσοχής μας, γεγονός αναπόφευκτο δεδομένων των στενών χρονικών περιθωρίων. Θα ακολουθήσουν επόμενες εκδόσεις, όπου η εν λόγω παρουσίαση θα βελτιωθεί, ίσως εμπλουτιστεί και με εναλλακτικές λύσεις. Οποιαδήποτε σχόλια, παρατηρήσεις, διορθώσεις και βελτιώσεις επί των λύσεων είναι ευπρόσδεκτα στην ηλεκτρονική διεύθυνση lisari.blogspot@gmail.com.

Με εκτίμηση

lisari team

10 – 06 – 2015

lisari team

Αντωνόπουλος Νίκος (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου Κατεύθυνση - Άργος)
Αυγερινός Βασίλης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίου ΔΙΑΤΑΞΗ - Ν. Σμύρνη και Νίκαια)
Βελαώρας Γιάννης (Φροντιστήριο ΒΕΛΑΩΡΑΣ - Λιβαδειά Βοιωτίας)
Βοσκάκης Σήφης (Φροντιστήριο Ευθύνη - Ρέθυμνο)
Γιαννόπουλος Μιχάλης (Αμερικάνικη Γεωργική Σχολή)
Γκριμπαβιώτης Παναγιώτης (Φροντιστήριο Αστρολάβος - Άρτα)
Δούδης Δημήτρης (3ο Λύκειο Αλεξανδρούπολης)
Ζαμπέλης Γιάννης (Φροντιστήρια Πουκαμισάς Γλυφάδας)
Κακαβάς Βασίλης (Φροντιστήριο Ώθηση - Αργυρούπολη)
Κάκανος Γιάννης (Φροντιστήριο Παπαπαναγιώτου – Παπαπαύλου - Σέρρες)
Κανάβης Χρήστος (Διδακτορικό στο ΕΜΠ – 2ο ΣΔΕ φυλακών Κορυδαλλού)
Καρδαμίτσης Σπύρος (Πρότυπο Λύκειο Αναβρύτων)
Κοπάδης Θανάσης (Ιδιοκτήτης Φροντιστηρίων 19+ - Πολύγωνο)
Κουλούρης Ανδρέας (3ο Λύκειο Γαλατσίου)
Κουστέρης Χρήστος (Φροντιστήριο Στόχος - Περιστέρι)
Μανώλης Ανδρέας (Φροντιστήριο Ρηγάκης - Κοζάνη)
Μαρούγκας Χρήστος (3ο ΓΕΛ Κηφισιάς)
Νάννος Μιχάλης (1ο Γυμνάσιο Σαλαμίνας)
Νικολόπουλος Θανάσης (Λύκειο Καταστaρίου, Ζάκυνθος)
Παγώνης Θεόδωρος (Φροντιστήριο Φάσμα - Αγρίνιο)
Παντούλας Περικλής (Φροντιστήρια Γούλα-Δημολένη - Ιωάννινα)
Παπαδομανωλάκη Μαρία (Ιδιοκτήτρια Πρότυπου Κέντρου Μάθησης ΔΙΑΚΡΙΣΙΣ - Ρέθυμνο)
Παπαμικρούλης Δημήτρης (Εκπαιδευτικός Οργανισμός Ρόμβος)
(νέο) *Ποδηματάς Θωμάς (Σπουδαστήριο Μαθηματικών Θωμάς Ποδηματάς – Βόλος)*
Ράπτης Γιώργος (6ο ΓΕΛ Βόλου)
Σίσκας Χρήστος (Φροντιστήριο Μπαχαράκης - Θεσσαλονίκη)
Σκομπρής Νίκος (Συγγραφέας – 1ο Λύκειο Χαλκίδας)
Σπλήνης Νίκος (Φροντιστήριο ΟΡΙΖΟΝΤΕΣ - Ηράκλειο Κρήτης)
Σπυριδάκης Αντώνης (Γυμνάσιο Βιάννου - Λασίθι)
Σταυρόπουλος Παύλος (Ιδιωτικά Εκπαιδευτήρια Δούκα)
Σταυρόπουλος Σταύρος (Γραμματέας Ε.Μ.Ε Κορινθίας - Γυμνάσιο Λ.Τ. Λέχαιου Κορινθίας)
Τηλέγραφος Κώστας (Φροντιστήριο Θεμέλιο - Αλεξανδρούπολη)
Τρύφων Παύλος (1ο Εσπερινό ΕΠΑΛ Περιστερίου)
Φιλιππίδης Χαράλαμπος (Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί)
Χαραλάμπους Σταύρος (Μουσικό Σχολείο Λαμίας)
Χατζόπουλος Μάκης (Υπουργείο Παιδείας και Θρησκευμάτων)

lisari team / σχολικό έτος 2014 – 15

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ: ΤΕΤΑΡΤΗ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΔΩΔΕΚΑ (12)

(έκδοση δ΄)

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 150

Α2. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 16

Α3. Σχολικό βιβλίο, σελίδα 96

Α4. α) Λάθος **,** σχολικό βιβλίο, σελίδα 11

β) Σωστό , σχολικό βιβλίο, σελίδα 40

γ) Σωστό, σχολικό βιβλίο, σελίδα 65

δ) Λάθος, σχολικό βιβλίο, σελίδα 95

ε) Λάθος, σχολικό βιβλίο, σελίδα 140

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$f'(x)=\left(\alpha x^3+\beta x^2-4\right)'=3\alpha x^2+2\beta x$$

Επίσης η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης f εφάπτεται στον άξονα x΄x (ευθεία y = 0) στο σημείο $A(-2,0)$ έχουμε,

- $f(-2)=0$ (1)
- $f'(-2)=0$ (2)

Από την (1) έχουμε :

$$f(-2)=0\Leftrightarrow \alpha(-2)^3+\beta(-2)^2-4=0\Leftrightarrow -8\alpha+4\beta=4 \quad (3)$$

Από την (2) έχουμε :

$$f'(-2)=0\Leftrightarrow 3\alpha(-2)^2+2\beta(-2)=0\Leftrightarrow 12\alpha-4\beta=0 \quad (4)$$

Προσθέτουμε τις (3) και (4) κατά μέλη και προκύπτει ότι $\alpha=1$.
Αντικαθιστώντας όπου $\alpha=1$ στην (4) βρίσκουμε ότι $\beta=3$.

Β2. Για α = 1 και β = 3 ο τύπος της συνάρτησης f γίνεται $f(x)=x^3+3x^2-4$, οπότε,

$$f'(x)=3x^2+6x$$

Έχουμε,

- $f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2+6x=0\Leftrightarrow 3x(x+2)=0\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-2$
- $f'(x)>0\Leftrightarrow 3x^2+6x>0\Leftrightarrow 3x(x+2)>0\Leftrightarrow x>0$ ή $x<-2$
- $f'(x)<0\Leftrightarrow 3x^2+6x<0\Leftrightarrow 3x(x+2)<0\Leftrightarrow -2<x<0$

Ο πίνακας μεταβολών της συνάρτησης f είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Άρα η συνάρτηση f είναι:

- γνησίως αύξουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty,-2]$ και $[0,+\infty)$,
- γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[-2,0]$

και παρουσιάζει

- τοπικό μέγιστο στη θέση $x_1=-2$ το $f(-2)=0$
- τοπικό ελάχιστο στη θέση $x_2=0$ το $f(0)=-4$.

Β3. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f σε σημείο της $(x, f(x))$ δίνεται από τη συνάρτηση

$$\lambda(x) = f'(x) = 3x^2 + 6x$$

Έχουμε:

$$\lambda'(x) = f''(x) = \left(3x^2 + 6x\right)' = 6x + 6,$$

συνεπώς

$$\lambda'(x) = 0 \Leftrightarrow 6x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

- $\lambda'(x) > 0 \Leftrightarrow 6x + 6 > 0 \Leftrightarrow x > -1$
- $\lambda'(x) < 0 \Leftrightarrow 6x + 6 < 0 \Leftrightarrow x < -1$

Ο πίνακας μεταβολών της $\lambda(x) = f'(x)$ είναι ο ακόλουθος:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$\lambda'(x)$		$-$	0	$+$	
$\lambda(x)$		$\searrow$	λ_{min}	$\nearrow$	

άρα η συνάρτηση $\lambda(x)$ παίρνει ελάχιστη τιμή για $x_o = -1$.

Επειδή,

$$f(-1) = (-1)^3 + 3(-1)^2 - 4 = -1 + 3 - 4 = -2$$

η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης στο σημείο $M(-1, -2)$ της γραφικής παράστασης της f.

Β΄ τρόπος

Έχουμε, $\lambda(x) = f'(x) = 3x^2 + 6x$ το σημείο της γραφικής παράστασης της f, στο οποίο η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης είναι το

$$x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{-6}{2\cdot 3} = -1 \; \textbf{....}$$

Β4. Έχουμε,

$$\lim_{x\to -2}\frac{f'(x)}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}} = \lim_{x\to -2}\frac{3x^2+6x}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{3x(x+2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{5}\right)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{3x(x+2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)}{x^2+1-5}$$

$$= \lim_{x\to -2}\frac{3x(x+2)\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)}{x^2-4}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{3x\cancel{(x+2)}\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)}{\cancel{(x+2)}(x-2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{3x\left(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{5}\right)}{x-2}$$

$$=\frac{3\cdot(-2)\left(\sqrt{(-2)^2+1}+\sqrt{5}\right)}{-2-2}=3\sqrt{5}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Έστω c το πλάτος των κλάσεων. Επειδή η μικρότερη διάρκεια είναι 0 και η κεντρική τιμή της $5^{ης}$ κλάσης είναι 18 , ο πίνακας παίρνει την μορφή :

Κλάσεις (σε ώρες)	**Κεντρικές τιμές** x_i	**Σχετικές συχνότητες** $f_i\%$
$[0,c)$		
$[c,2c)$		
$[2c,3c)$		
$[3c,4c)$		
$[4c,5c)$	18	
	Σύνολο	

Επομένως,

$$\frac{4c+5c}{2}=18 \Leftrightarrow 9c=36 \Leftrightarrow c=4$$

Γ2. Η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην $5^η$ κλάση είναι 36^o, άρα,

$$\alpha_5=f_5\cdot 360 \Leftrightarrow 36=f_5\cdot 360 \Leftrightarrow f_5=0,1$$

Οπότε

$$f_5\%=10$$

Είναι

$$\frac{N_1}{4}=\frac{N_2}{9}=\frac{N_3}{15}=\frac{N_4}{18}=\lambda,\ \lambda>0$$

Οπότε

$$N_1=4\lambda\ ,\ N_2=9\lambda\ ,\ N_3=15\lambda\ ,\ N_4=18\lambda$$

Επομένως θα έχουμε :

$$\begin{aligned} v_1&=N_1=4\lambda\\ v_2&=N_2-N_1=5\lambda\\ v_3&=N_3-N_2=6\lambda\\ v_4&=N_4-N_3=3\lambda \end{aligned}$$

Επίσης

$$f_5=0,1 \Leftrightarrow \frac{v_5}{v}=0,1 \Leftrightarrow v_5=0,1v$$

Όμως,

$$v_1+v_2+v_3+v_4+v_5=v \Rightarrow 4\lambda+5\lambda+6\lambda+3\lambda+0,1v=v \Rightarrow v=20\lambda$$

άρα,

$$f_1=\frac{v_1}{v}\Rightarrow f_1=\frac{4\lambda}{20\lambda}=0,2$$
$$f_2=\frac{v_2}{v}\Rightarrow f_2=\frac{5\lambda}{20\lambda}=0,25$$
$$f_3=\frac{v_3}{v}\Rightarrow f_3=\frac{6\lambda}{20\lambda}=0,3$$
$$f_4=\frac{v_4}{v}\Rightarrow f_4=\frac{3\lambda}{20\lambda}=0,15$$

Άρα ο πίνακας παίρνει τη μορφή

Κλάσεις (σε ώρες)	**Κεντρικές τιμές** x_i	**Σχετικές συχνότητες** $f_i\%$
$[0,4)$	2	20
$[4,8)$	6	25
$[8,12)$	10	30
$[12,16)$	14	15
$[16,20)$	18	10
	Σύνολο	100

Γ3. Θεωρώντας τις παρατηρήσεις ομοιόμορφα κατανεμημένες (εκφώνηση) μέσα σε κάθε κλάση, το ζητούμενο ποσοστό είναι :

$$5\%+25\%+15\%=45\%$$

επειδή,

- Από 3 έως 4 ώρες αντιστοιχεί στο $\frac{1}{4}$ της $1^{ης}$ κλάσης δηλαδή $\frac{1}{4}\cdot 20\%=5\%$,
- Από 4 έως 8 ώρες αντιστοιχεί σε ολόκληρη τη $2^{η}$ κλάση δηλαδή ποσοστό 25% ,
- Τέλος από 8 έως 10 ώρες αντιστοιχεί στο $\frac{1}{2}$ της $3^{ης}$ κλάσης δηλαδή $\frac{1}{2}\cdot 30\%=15\%$,

Γ4. Η μέση τιμή του αρχικού δείγματος δίνεται από τον τύπο του σταθμικού μέσου,

$$\bar{x}=\frac{6\cdot v_2+10\cdot v_3+14\cdot v_4+18\cdot v_5}{v_2+v_3+v_4+v_5}$$
$$=\frac{\frac{6\cdot v_2+10\cdot v_3+14\cdot v_4+18\cdot v_5}{v}}{\frac{v_2+v_3+v_4+v_5}{v}}$$
$$=\frac{6\cdot f_2+10\cdot f_3+14\cdot f_4+18\cdot f_5}{f_2+f_3+f_4+f_5}$$

$$=\frac{6\cdot 0,25+10\cdot 0,3+14\cdot 0,15+18\cdot 0,1}{0,25+0,3+0,15+0,1}$$

$$=\frac{1,5+3+2,1+1,8}{0,8}$$

$$=\frac{8,4}{0,8}=10,5$$

άρα η μέση τιμή των ωρών που τελικά πλήρωσαν οι συνδρομητές αν αφαιρέσουμε τις 4 ώρες είναι,

$$\bar{x}'=10,5-4=6,5h$$

Β΄ τρόπος

Το νέο δείγμα μετά από την αφαίρεση των 4 ωρών είναι:

Κλάσεις (σε ώρες)	**Κεντρικές τιμές** x_i	**Συχνότητα**	**Σχετικές συχνότητες** $f_i\%$
$[0,4)$	2	5λ	$\frac{5\lambda}{16\lambda}\cdot 100=\frac{125}{4}$
$[4,8)$	6	6λ	$\frac{6\lambda}{16\lambda}\cdot 100=\frac{150}{4}$
$[8,12)$	10	3λ	$\frac{3\lambda}{16\lambda}\cdot 100=\frac{75}{4}$
$[12,16)$	14	2λ	$\frac{2\lambda}{16\lambda}\cdot 100=\frac{50}{4}$
	Σύνολο	16λ	100

άρα η μέση τιμή δίνεται από τον τύπο $\bar{x}=\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot f_i$ άρα

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{4}x_i\cdot f_i=2\cdot\frac{1,25}{4}+6\cdot\frac{1,5}{4}+10\cdot\frac{0,75}{4}+14\cdot\frac{0,5}{4}=6,5$$

Γ΄ τρόπος (δ΄ έκδοση)

Για ευκολία θεωρούμε ότι όλες οι παρατηρήσεις είναι 100α, από τις σχετικές συχνότητες βρίσκουμε όλα τα ν_i όπως φαίνεται στο παρακάτω πίνακα. Επίσης θέλουμε μόνο τις 4 τελευταίες κλάσεις, άρα την πρώτη κλάση την αγνοούμε, επομένως έχουμε τον εξής πίνακα,

Κλάσεις (σε ώρες)	**Κεντρικές τιμές x_i**	**Συχνότητες v_i**	**Σχετικές συχνότητες f_i %**
~~[0 , 4)~~	~~2~~	~~20α~~	~~20~~
[4 , 8)	6	25α	25
[8 , 12)	10	30α	30
[12 , 16)	14	15α	15
[16 , 20)	18	10α	10
	Σύνολο	100α	100

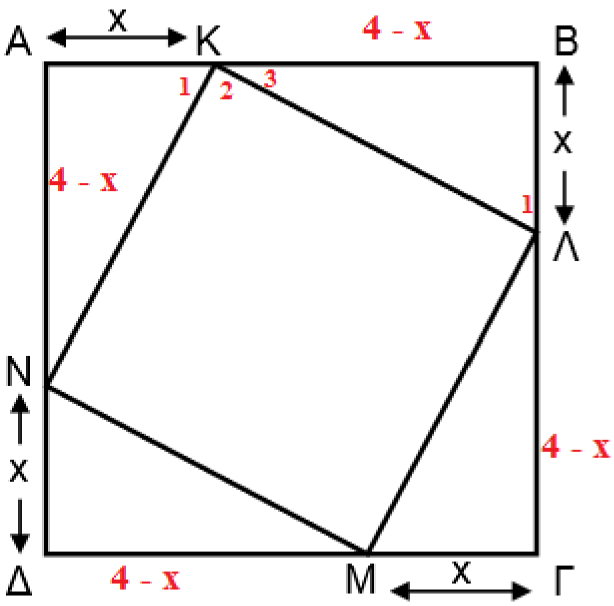
άρα βρίσκουμε τη μέση τιμή των τιμών από τις 4 ώρες και μετά

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=2}^{5} x_i v_i}{v - v_1} = \frac{6\cdot 25\alpha + 10\cdot 30\alpha + 14\cdot 15\alpha + 18\cdot 10\alpha}{100\alpha - 20\alpha} = 10,5 \text{ ώρες.}$$

Άρα ο μέσος **πληρωμένος** χρόνος, πέραν των 4 πρώτων ωρών, είναι :

$$10,5 - 4 = 6,5 \text{ ώρες.}$$

ΘΕΜΑ Δ



Σχήμα Ι

Δ1. Τα τρίγωνα ΑΚΝ, ΚΒΛ, ΛΓΜ και ΔΝΜ είναι ίσα διότι είναι ορθογώνια και έχουν δύο πλευρές αντίστοιχα ίσες, τις

$$AK = B\Lambda = \Gamma M = N\Delta = x$$

και

$$KB = \Lambda\Gamma = \Delta M = AN = 4 - x$$

Άρα τα τρίγωνα αυτά είναι ισεμβαδικά με εμβαδόν με $\frac{1}{2}x(4-x)$. Επομένως το εμβαδόν του ΚΛΜΝ προκύπτει αν από το εμβαδόν του τετραγώνου ΑΒΓΔ αφαιρέσουμε τα εμβαδά των τεσσάρων ίσων ορθογωνίων τριγώνων, δηλαδή

$$E(x) = E_{AB\Gamma\Delta} - 4 \cdot E_{AKN}$$

όπου $E(x)$ το ζητούμενο εμβαδόν .

Όμως,

$AK = x > 0$ και $AN = 4 - x > 0 \Leftrightarrow x < 4$ οπότε $0 < x < 4$ άρα,

$$E(x) = 4^2 - 4\frac{1}{2}x \cdot (4-x) = 16 - 8x + 2x^2 = 2 \cdot (x^2 - 4x + 8),\ x \in (0,4)$$

Β΄ τρόπος

Από Πυθαγόρειο θεώρημα στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΝ έχουμε,

$$KN^2 = AK^2 + AN^2 = x^2 + (4-x)^2$$

Θα δείξουμε ότι το τετράπλευρο ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.

- όλες οι πλευρές του είναι ίσες (από την ισότητα τριγώνων)
- και η γωνία K_2 είναι ορθή, γιατί

$$\begin{aligned}\hat{K}_2 &= 180^0 - A\hat{K}N - \Lambda\hat{K}B\\ &= 180^0 - \hat{K}_1 - \hat{K}_3\\ &= 180^0 - \hat{K}_1 - \hat{\Lambda}_1 \quad (\text{από ισότητα τριγώνων})\\ &= \hat{B} \quad (\text{από το τρίγωνο } BK\Lambda)\\ &= 90^0\end{aligned}$$

άρα το ΚΛΜΝ είναι ρόμβος με μια γωνία ορθή, άρα είναι τετράγωνο, οπότε το εμβαδόν του είναι

$$(K\Lambda MN) = KN^2 = x^2 + (4-x)^2 = \ldots$$

Δ2. Έχουμε,

$$E(x) = 2x^2 - 8x + 16,\ x \in (0,4)$$

άρα

- $E'(x) = 4x - 8$
- $E'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$
- $E'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x - 8 > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Επομένως:

x	0	2	4
$E'(x)$	−	0	+
$E(x)$	↘		↗

Για $x = 2$ το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο.

Δ3. α) Έχουμε,

$$y_i = E(x_i) = 2\cdot(x_i^2 - 4x_i + 8) \quad i = 1,2,3,\ldots,19 \text{ με } x_i \in (0,4)$$

Ισχύει:

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots x_{19}}{19} = 2 \Leftrightarrow \boxed{x_1 + x_2 + \ldots x_{19} = 38}\ (1)$$

Έχουμε 19 παρατηρήσεις άρα η διάμεσος δ = 2 είναι η μεσαία δηλαδή η 10^{η} παρατήρηση, οπότε χωρίζει το δείγμα σε 9 παρατηρήσεις εκατέρωθεν όπως φαίνεται παρακάτω,

$$\underbrace{t_1, t_2, \ldots, t_9}_{9\,\text{παρατηρήσεις}}, t_{10} = 2, \underbrace{t_{11}, \ldots, t_{19}}_{9\,\text{παρατηρήσεις}}, \quad \text{όπου } t_1 < t_2 < \ldots < t_{19}$$

Οπότε,

$$\frac{y_1+y_2+...+y_{19}}{19}=8,02 \Leftrightarrow \frac{2\left(x_1{}^2-4x_1+8\right)+2\left(x_2{}^2-4x_2+8\right)+...+2\left(x_{19}{}^2-4x_{19}+8\right)}{19}=8,02$$

$$\Leftrightarrow \frac{2x_1{}^2-8x_1+16+2x_2{}^2-8x_2+16+...+2x_{19}{}^2-8x_{19}+16}{19}=8,02$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\left(x_1{}^2+x_2{}^2+...+x_{19}{}^2\right)-8\left(x_1+x_2+...+x_{19}\right)+1916}{19}=8,02$$

$$\Leftrightarrow 2\cdot\frac{\left(x_1{}^2+x_2{}^2+...+x_{19}{}^2\right)}{19}-8\frac{\left(x_1+x_2+...+x_{19}\right)}{19}+\frac{19\cdot 16}{19}=8,02$$

$$\overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2\overline{\left(x^2\right)}-8\cdot 2+16=8,02$$

$$\Leftrightarrow \overline{\left(x^2\right)}=4,01$$

Β΄ τρόπος
Ισχύει :

$$E\left(x_i\right)=y_i \Leftrightarrow 2x_i{}^2-8x_i+16=y_i \Leftrightarrow x_i{}^2=y_i+8x_i-16$$

Από **βασική εφαρμογή** έχουμε πιο εύκολα,

$$\overline{\left(x^2\right)}=\frac{\overline{y}+8\overline{x}-16}{2} \Leftrightarrow \overline{\left(x^2\right)}=4,01$$

β) Από το δοσμένο τύπο

$$s^2=\frac{1}{v}\left\{\sum t_i{}^2-\frac{\left(\sum_{i=1}^{v} t_i\right)^2}{v}\right\}$$

έχουμε,

$$s^2=\frac{1}{19}\cdot\left\{\left(x_1^2+x_2^2+...+x_2^{19}\right)-\frac{\left(x_1+x_2+...+x_{19}\right)^2}{19}\right\}=\frac{x_1^2+x_2^2+...+x_2^{19}}{19}-\left(\frac{x_1+x_2+...+x_{19}}{19}\right)^2$$

$$=\overline{\left(x^2\right)}-\left(\overline{x}\right)^2$$

$$=4,01-4$$

$$=0,01$$

άρα

$$CV=\frac{s}{\overline{x}}\cdot 100\%=\frac{\sqrt{0,01}}{2}\cdot 100\%=\frac{0,1}{2}\cdot 100\%=5\%<10\%$$

δηλαδή το δείγμα ομοιογενές.

γ) Ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega=\left\{x_1,x_2,...,x_{19}\right\}$. Βρίσκουμε τις ευνοϊκές περιπτώσεις για να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α.

Ισχύει $x_i^2 \geq 4$, με $x_i \in (0,4)$ οπότε,

$$x_i^2 \geq 4 \overset{x_i>0}{\Rightarrow} x_i \geq 2$$

όμως η διάμεσος είναι δ = 2, δηλαδή χωρίζει το δείγμα σε 9 παρατήσεις εκατέρωθεν όπως είδαμε παραπάνω, άρα

$$N(A) = 1 + 9 = 10$$

επομένως,

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{10}{19}$$

Βρίσκω τις ευνοϊκές περιπτώσεις για να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Β

$$\begin{aligned} E(x_i) \leq 8 \Leftrightarrow 2\cdot\left(x_i^2 - 4x_i + 8\right) \leq 8 &\Leftrightarrow x_i^2 - 4x_i + 8 \leq 4 \\ &\Leftrightarrow x_i^2 - 4x_i + 4 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x_i - 2)^2 \leq 0 \\ &\Leftrightarrow (x_i - 2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow x_i = 2 \end{aligned}$$

και επειδή οι παρατηρήσεις είναι διαφορετικές ανά δύο, υπάρχει μοναδικό i τέτοιο ώστε $x_i = 2$, δηλαδή N(B) = 1, άρα

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{1}{19}$$

Παρατηρώ ότι $B \subseteq A$ άρα $A \cup B = A$, επομένως,

$$P(\Gamma) = P\left((A\cup B)'\right) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{10}{19} = \frac{9}{19}$$