ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Κώστας Βακαλόπουλος, Κώστας Παπαϊωάννου, Θανάσης Χριστόπουλος

Άσκηση 1

Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=2x^3-\lambda x^2$.

α) Να βρεθεί η $F'(x)$.

β) Να βρεθεί η εφαπτόμενη (ε) στο $A(2,F(2))$.

γ) Θεωρούμε το δ.χ. $\Omega=\{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5\}$ ενός πειράματος τύχης αποτελούμενο από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και $\lambda\in\Omega$. Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων.

$A=\{\lambda\in\Omega/$ η ευθεία (ε) να είναι παράλληλη στην ευθεία (η): $y = 8x - 2\}$

$B=\{\lambda\in\Omega/$ η ευθεία (ε) να είναι κάθετη στην ευθεία (ζ): $y=-\frac{1}{4}x+3\}$

$\Gamma=\{\lambda\in\Omega/\lim\limits_{x\to1}F(x)=\lambda^2\}$

$\Delta=\{\lambda\in\Omega/$ ο ρυθμός μεταβολής της F να παίρνει την ελάχιστη τιμή $\frac{-3}{2}\}$.

δ) Να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων:

Ε: Να πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα Α, Β, Γ, Δ.

Ζ: Να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα Α, Β, Γ, Δ.

Η: Να πραγματοποιείται ένα μόνο από τα Α, Β, Γ, Δ.

Λύση

α) $F'(x)=6x^2-2\lambda x=2x(3x-\lambda)$

β) $F(2)=16-4\lambda$

$F'(2)=24-4\lambda$

Άρα: η εξίσωση της εφαπτόμενης στο $A(2,F(2))$ είναι: $y=(24-4\lambda)\cdot x+\beta$ ενώ $16-4\lambda=(24-4\lambda)\cdot 2+\beta \Leftrightarrow \beta=-32+4\lambda$

άρα $y=(24-4\lambda)\cdot x-32+4\lambda$: (ε)

γ) i) Πρέπει: $24-4\lambda=8 \Leftrightarrow \lambda=4$

Άρα: $A=\{4\}$, οπότε $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{9}$.

ii) Πρέπει:

$(24-4\lambda)\left(-\frac{1}{4}\right)=-1 \Leftrightarrow 24-4\lambda=4 \Leftrightarrow \lambda=5$

Άρα: Β = {5}, οπότε $P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{1}{9}$

iii) $\lim\limits_{x\to1}F(x)=\lim\limits_{x\to1}(2x^3-\lambda x^2)=$

$=2\cdot1^3-\lambda\cdot1^2=2-\lambda$

Πρέπει: $2-\lambda=\lambda^2 \Leftrightarrow \lambda^2+\lambda-2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda=-2$ ή $\lambda=1$.

Άρα $\Gamma=\{-2,1\}$ οπότε $P(\Gamma)=\frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)}=\frac{2}{9}$

iv) $F'(x)=6x^2-2\lambda x$

$F''(x)=12x-2\lambda=2(6x-\lambda)$

x	$-\infty$	$\lambda/6$	$+\infty$
F΄(x)	−	0	+
F(x)	↘		↗
		τ.ελ.	

Από τον πίνακα μεταβολής του προσήμου της F'' προκύπτει ότι ο ρυθμός μεταβολής ελαχιστοποιείται για $x=\frac{\lambda}{6}$ ενώ η ελάχιστη τιμή του είναι: $F'\left(\frac{\lambda}{6}\right)=-\frac{\lambda^2}{6}$.

Πρέπει: $-\frac{\lambda^2}{6}=-\frac{3}{2} \Leftrightarrow \lambda=\pm3$.

Άρα: $\Delta=\{-3,3\}$, οπότε $P(\Delta)=\frac{N(\Delta)}{N(\Omega)}=\frac{2}{9}$

δ) Τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ, Δ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους άρα:

- $P(E)=P(A\cup B\cup\Gamma\cup\Delta)=$
  $=P(A)+P(B)+P(\Gamma)+P(\Delta)=$
  $=\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{2}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$.
- $P(Z)=P(A\cup B\cup\Gamma\cup\Delta)'=$
  $=1-P(A\cup B\cup\Gamma\cup\Delta)=1-\frac{6}{9}=\frac{1}{3}$

- Επειδή τα ενδεχόμενα Α, Β, Γ και Δ είναι ανά δύο ξένα μεταξύ τους θα ισχύει:
  $A-B-\Gamma-\Delta=A$, $B-A-\Gamma-\Delta=B$,
  $\Gamma-A-B-\Delta=\Gamma$ και $\Delta-A-B-\Gamma=\Delta$
  Άρα:
  $$P(H)=P(A)+P(B)+P(\Gamma)+P(\Delta)=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

Άσκηση 2

Δίνεται η συνάρτηση $F(x)=2x^3-\kappa x^2+6\lambda x+4$, $x\in\mathbb{R}$.

α) Να βρεθεί η F'.

β) Αν η F παρουσιάζει ακρότατα για x = 1 και x = 2 δείξτε ότι κ = 9 και λ = 2.

γ) Αν κ = 9 και λ = 2 να μελετηθεί η F ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

δ) Να βρεθεί ο συντελεστής διεύθυνσης της F στο σημείο $A(\lambda,F(\lambda))$. Για ποια τιμή του λ αυτός γίνεται ελάχιστος; Ποια η ελάχιστη τιμή του;

ε) Θεωρούμε συνάρτηση $h(x)=\dfrac{F'(x)}{\sqrt{x^2+5}-3}$

Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{x\to 2}h(x)$.

Λύση

α) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $F'(x)=6x^2-2\kappa x+6\lambda$.

β) Θα ισχύει: $F'(1)=0\Leftrightarrow \kappa-3\lambda=3$ (1)
και $F'(2)=0\Leftrightarrow 2\kappa-3\lambda=12$ (2)
Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων (1), (2) προκύπτει: κ = 9 και λ = 2.

γ) Για κ = 9 και λ = 2,
$F(x)=2x^3-9x^2+12x+4$
$F'(x)=6x^2-18x+12$
Από τον παρακάτω πίνακα προκύπτει ότι:

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
F΄(x)		+	0	−	0	+	
F		↗		↘		↗	

- η F είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty,1]$ και στο $[2,+\infty)$ ενώ στο $[1, 2]$ είναι γν. φθίνουσα.
- Παρουσιάζει στο 1 τ. μέγιστο το F(1) = 9 και στο 2 τ. ελάχιστο F(2) = 8.

δ) Ο συντελεστής διεύθυνσης της F στο Α(λ, F(λ)) είναι: $F'(\lambda)=6\lambda^2-18\lambda+12$
$F''(\lambda)=12\lambda-18$

x	$-\infty$		3/2		$+\infty$
F΄΄(λ)		−	0	+	
F΄		↘		↗	

Από το παραπάνω πίνακα προκύπτει ότι ο συντελεστής διεύθυνσης $F'(\lambda)$ γίνεται ελάχιστος για $\lambda=\frac{3}{2}$ με ελάχιστη τιμή: $F'\left(\frac{3}{2}\right)=-\frac{3}{2}$.

ε)
$$\lim_{x\to 2}\frac{F'(x)}{\sqrt{x^2+5}-3}=\lim_{x\to 2}\frac{6x^2-18x+12}{\sqrt{x^2+5}-3}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{(6x^2+8x+12)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(\sqrt{x^2+5}-3)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{6(x-1)(x-2)\sqrt{x^2+5}+3}{(x^2+5)-9}$$
$$=\lim_{x\to 2}\frac{6(x-1)(x-2)(\sqrt{x^2+5}+3)}{(x+2)(x-2)}=\ldots=9$$

Άσκηση 3

Η ομάδα ποδοσφαίρου του 3ου Ε.Λ. Κοζάνης αποτελείται από μαθητές της Α, Β και Γ τάξης. Η συμμετοχή τους στην ομάδα σε σχέση με την ηλικίας τους ακολουθεί την κανονική κατανομή. Οι σημερινές ηλικίες των μαθητών έχουν συντελεστή μεταβολής $CV_1=6,25\%$. Πριν από 11 χρόνια ο συντελεστής μεταβολής ήταν $CV_2=20\%$.

α) Να βρεθεί η μέση σημερινή τους ηλικία.

β) Πριν πόσα χρόνια από σήμερα οι ηλικίες των μαθητών είχαν για πρώτη φορά ομοιογένεια.

γ) Δείξτε ο τύπος που δίνει τη διακύμανση μπορεί να πάρει την μορφή:
$$S^2=\frac{1}{\nu}\sum_{i=1}^{\nu}x_i^2-(\bar{x})^2.$$

δ) Αν το άθροισμα των τετραγώνων των σημερινών ηλικιών των μαθητών είναι 5.140 να βρεθεί πόσοι μαθητές απαρτίζουν την ομάδα ποδοσφαίρου.

ε) Αν οι μαθητές της Α΄ τάξης είναι μέχρι και 15 χρόνων, της Β΄ μέχρι 17 χρόνων και πάρουμε τυχαία ένα μαθητή από την ομάδα

i) να βρεθεί η πιθανότητα των ενδεχομένων:

Ε: να είναι μαθητής της Α ή της Β τάξης.

Ζ: Να είναι μαθητής της Β και όχι της Α.

ii) Πόσοι περίπου είναι οι μαθητές κάθε τάξης που συμμετέχουν στην ομάδα ποδοσφαίρου.

Λύση

α) Έστω $x_i, i=1,2,...,v$ οι σημερινές ηλικίες των παιδιών.

Τότε: $CV_1 = \frac{S_x}{\bar{x}} = 6,25\% \Leftrightarrow \boxed{S_x = 0,025 \cdot \bar{x}}$ (1)

Αν $y_i = x_i - 11$, I = 1, …, ν οι ηλικίες πριν από 11 χρόνια, τότε: $S_y = S_x$ ενώ $\bar{y} = \bar{x} - 11$.

Άρα $CV_2 = \frac{S_y}{\bar{y}} = 20\% \Leftrightarrow \frac{S_x}{\bar{x}-11} = 20\% \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \boxed{S_x = 0,2 \cdot \bar{x} - 2,2}$ (2)

Από (1), (2) έχουμε:

$0,0625 \cdot \bar{x} = 0,2\bar{x} - 2,2 \Leftrightarrow \boxed{\bar{x} = 16}$

β) Έστω πριν από t χρόνια οι ηλικίες των μαθητών είχαν για πρώτη φορά ομοιογένεια. Τότε θα ισχύει: $CV \le 10\%$.

Αν οι ηλικίες των μαθητών ήταν τότε:

$z_i = x_i - t$, I = 1, 2, …, v, θα ισχύει:

$S_z = S_x$ και $\bar{z} = \bar{x} - t$.

Άρα: $CV_2 = \frac{S_z}{|\bar{z}|} = \frac{S_x}{\bar{x}-t} \le 10\%$ (3)

Όμως: $S_x = 1$ (ερώτημα (α)).

Άρα: $(3) \Leftrightarrow \frac{1}{16-t} \le 0,1 \Leftrightarrow t \ge 6$

Άρα: Πριν από 6 χρόνια θα είχαν για πρώτη φορά ομοιογένεια.

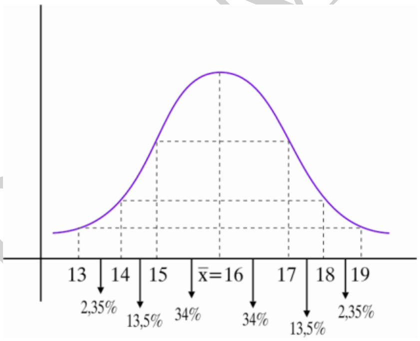
γ) Από τον τύπο: $S^2 = \frac{1}{v}\left\{\sum_{i=1}^{v} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{v} x_i\right)^2}{v}\right\} =$

$$= \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} x_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{v} x_i\right)^2}{v^2} = \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} x_i^2 - \left(\frac{\sum_{i=1}^{v} x_i}{v}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{v}\sum_{i=1}^{v} x_i^2 - (\bar{x})^2$$

δ) Για $\sum_{i=1}^{v} x_i^2 = 5140$, $\bar{x} = 16$ και $S_x = 1$ ο προηγούμενος τύπος δίνει: $1 = \frac{1}{v}5140 - 16^2 \Leftrightarrow \boxed{v = 20}$

ε) Αφού οι ηλικίες των παιδιών ακολουθούν κανονική κατανομή θα έχουμε:



i) $P(E) = (50+34)\% = 84\%$ $(x \le 17)$

$P(Z) = 68\%$ $(15 < x \le 17)$

ii) Για την Α΄ τάξη έχουμε ποσοστό 16% $(x \le 15)$.

Άρα $16\% \cdot 20 = 3$ μαθητές

Για την Β΄ τάξη έχουμε ποσοστό 68% $(15 < x \le 17)$

Άρα $68\% \cdot 20 \simeq 14$ ενώ για την Γ΄ τάξη έχουμε πάλι 16% $(x > 17)$ άρα 3 μαθητές.

Άσκηση 4

Έστω ο δ.χ. $\Omega = \{2,4,6,...,2v\}$, $v \in \mathbb{N}^*$ ενός πειράματος τύχης αποτελούμενος από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα. Αν τα στοιχεία του Ω, είναι οι παρατηρήσεις t_i μιας μεταβλητής Χ με μέση τιμή $\bar{x} = 9$,

α) Να βρεθεί το σύνολο Ω.

β) Να βρεθεί η διάμεσος (δ) και το εύρος (R) των παρατηρήσεων.

γ) Δείξτε ότι: $S^2 = 2\bar{x} + 3$.

δ) Αν θεωρήσουμε τα ενδεχόμενα,

$A = \{\alpha \in \Omega / \alpha = \pi o \lambda 4\}$

$B=\{\beta\in\Omega/\beta$ ρίζα της εξίσωσης:

$$\frac{(x^2-6x+8)(x-3)}{x-2}=0$$

να βρεθούν οι πιθανότητες των ενδεχομένων: Α, Β, $A\cap B$, $A\cup B$, $A-B$

Λύση

α) Τα στοιχεία του Ω αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 2$, $\omega = 2$ και πλήθος ν.

Άρα: $\bar{x}=\frac{1}{\nu}\sum t_i \Leftrightarrow \bar{x}=\frac{1}{\nu}\cdot\frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9=\frac{1}{2}[2\cdot 2+(\nu-1)2]\Leftrightarrow ...\Leftrightarrow \nu=8$

Άρα $\Omega=\{2,4,6,...16\}$

β) $\delta=\frac{t_4+t_5}{2}=\frac{8+10}{2}=9$

$R=t_{max}-t_{min}=16-2=14$

γ) $S^2=\frac{1}{\nu}\sum(t_i-\bar{x})^2=$

$=\frac{1}{8}[(2-9)^2+(4-9)^2+...+(16-9)^2]=\frac{168}{8}=21$

Άρα: $S^2=2\cdot 9+3=2\bar{x}+3$.

δ) $A=\{4,8,12,16\}$, $N(A)=4$

$B=\{4\}$, $N(B)=1$

Άρα: $P(A)=\frac{4}{8}$, $P(B)=\frac{1}{8}$

Όμως: $A\cap B=\{4\}$ ενώ $A\cup B=\{4,8,12,16\}$

Άρα: $P(A\cap B)=\frac{1}{8}$, $P(A\cup B)=\frac{4}{8}$ και

$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{3}{8}$

Άσκηση 5

Το πολύγωνο συχνοτήτων της κατανομής (Χ) του μηνιαίου τζίρου των βιοτεχνιών μιας κωμόπολης, (σε εκατοντάδες ευρώ) ομαδοποιημένη σε κλάσεις ίσου πλάτους, έχει κορυφές τα σημεία: Α(20, 0), Β(40, 5), Γ(60, 10), Δ(80, 20) Ε(100, 30), Ζ(120, ν_5), Η(140, 10), Θ(160, 0).

Η κατακόρυφη γραμμή με εξίσωση x = 100 χωρίζει το χωρίο που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα σε δύο ισεμβαδικά χωρία.

α) **Να αποδείξετε ότι $\nu_5 = 25$.**

β) **Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα συχνοτήτων της κατανομής (x).**

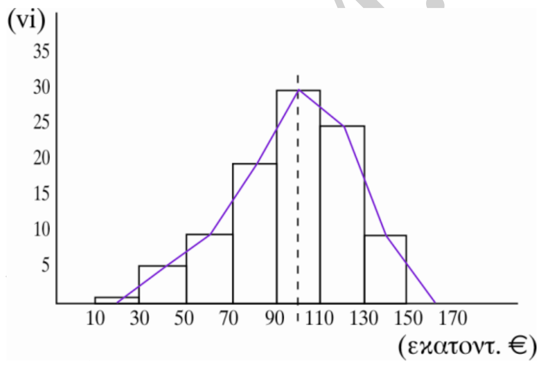
γ) **Να υπολογίσετε τις τιμές των μέτρων θέσης της (Χ).**

δ) **Αν ως όριο βιωσιμότητας τη βιοτεχνίας είναι τα 7200 ευρώ, να εκτιμήσετε το ποσοστο (%) των βιοτεχνιών που δεν μπορούν να επιβιώσουν.**

ε) **Να χαρακτηρίσετε την κατανομή ως προς τη συμμετρία της.**

Λύση

Ιστόγραμμα Συχνοτήτων



Κλάσεις	x_i	ν_i	$x_i\nu_i$	f_i	$f_i\%$	$F_i\%$
[30, 50)	40	5	200	0,05	5	5
[50, 70)	60	10	600	0,10	10	15
[70, 90)	80	20	1600	0,20	20	35
[90, 110)	100	30	3000	0,30	30	65
[110, 130)	120	ν_5	3000	0,25	25	90
[130, 150)	140	10	1400	0,10	10	100

α) Πρέπει: $\nu_1+\nu_2+\nu_3+\frac{\nu_4}{2}=\frac{\nu_4}{2}+\nu_5+\nu_6\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5+10+20+15=15+\nu_5+10\Leftrightarrow \boxed{\nu_5=25}$

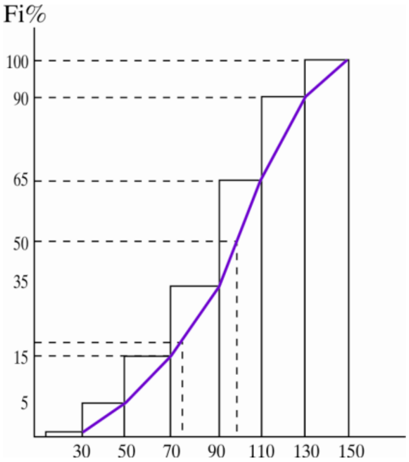
β) Βλέπε σχήμα! (ΙΣΤΟΓΡΑΜΜΑ)

γ) $\bar{x}=\frac{9800}{100}=\boxed{98}$ $\left(=\frac{\sum x_i\nu_i}{\nu}\right)$

$\delta=\boxed{100}$

$(A\hat{B}\Delta\approx A\hat{\Gamma}E\Rightarrow\frac{\Delta B}{A\Delta}=\frac{E\Gamma}{AE}\Rightarrow\frac{\Delta B}{15}=\frac{20}{30}\Rightarrow$

$\Rightarrow\Delta B=10)$. Άρα $\delta=90+10=\boxed{100}$



δ) Από το πολύγωνο αθροιστικών σχετ. συχν. (%) έχουμε: $K\hat{\Lambda}M \approx K\hat{A}N \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{KM}{M\Lambda} = \frac{KN}{NA} \Rightarrow \frac{KM}{2} = \frac{20}{20} \Rightarrow KM = 2$$

Άρα: ζητούμενο ποσοστό: 15 + 2 = 17%

ε) Επειδή $\overline{x} < \delta$ έχουμε **αρνητική ασυμμετρία.**

Άσκηση 6

Αν το τοπικό ελάχιστο και το τοπικό μέγιστο της συνάρτησης f με $f(x) = x^3 - x^2 + \frac{4}{5}$ είναι αντίστοιχα οι πιθανότητες των ενδεχομένων Α, Β του δ.χ. Ω ενός πειράματος τύχης.

α) Να εξετάσετε αν τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα.

β) Να βρείτε σε ποιο διάστημα βρίσκεται η πιθανότητα: $P(A \cap B)$.

Λύση

Για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x$.

x	$-\infty$	0		2/3	$+\infty$
f΄(x)	+	0	−	0	+
f	↗		↘		↗

- $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = \frac{2}{3}$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > \frac{2}{3}$
- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{2}{3}$

Άρα η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 0 το $f(0) = \frac{4}{5}$ και τοπικό ελάχιστο στο $\frac{2}{3}$ το $f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{88}{135}$.

Άρα $P(A) = \frac{88}{135}$ και $P(B) = \frac{4}{5}$

α) Αν τα ενδεχόμενα Α, Β ήταν ασυμβίβαστα θα ίσχυε: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{88}{135} + \frac{4}{5} > 1$

άτοπο! Άρα: τα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα.

β) $A \cap B \subseteq A \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A)$

$A \cap B \subseteq B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(B)$

Άρα: $P(A \cap B) \leq \min\{P(A), P(B)\} =$

$$= \min\left\{\frac{88}{135}, \frac{4}{5}\right\} = \frac{88}{135}$$

Άρα: $P(A \cap B) \leq \frac{88}{135}$ (1) Επίσης:

$P(A \cup B) \leq 1 \Leftrightarrow P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{88}{135} + \frac{4}{5} - 1 \leq P(A \cap B) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{61}{135} \leq P(A \cap B)$ (2)

Από (1), (2) προκύπτει ότι:

$$\frac{61}{135} \leq P(A \cap B) \leq \frac{88}{135}$$

Άσκηση 7

Έστω Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6} ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Αν $P(1) = 2P(2) = \frac{P(3)}{3} = \frac{P(4)}{4} = P(5) = 3P(6)$.

α) Να βρεθούν οι πιθανότητες όλων των απλών ενδεχομένων του Ω.

β) Αν $E = \{\lambda \in \Omega \,/$ η συνάρτηση $f(x) = x^3 - \lambda x^2 + \lambda x$ δεν έχει ακρότατα στο $\mathbb{R}\}$, να βρεθεί η P(E).

Λύση

α) Προφανώς ισχύει:

$P(1) + P(2) + P(3) + \ldots + P(6) = 1 \Leftrightarrow$

$P(1) + \frac{P(1)}{2} + 3P(1) + 4P(1) + P(1) + \frac{P(1)}{3} = 1 \Leftrightarrow$

$\ldots P(1) = \frac{6}{59}$

άρα: $P(2)=\frac{3}{59}$, $P(3)=\frac{18}{59}$, $P(4)=\frac{24}{59}$,

$P(5)=\frac{6}{59}$ και $P(6)=\frac{2}{59}$

β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=3x^2-2\lambda x+\lambda$
Η συνάρτηση f δεν έχει ακρότατα.

Άρα $\Delta\le 0\Leftrightarrow 4\lambda^2-12\lambda\le 0\Leftrightarrow 0\le\lambda\le 3$

οπότε: $E=\{1,2,3\}$. Άρα:

$$P(E)=P(1)+P(2)+P(3)=\frac{6+3+18}{59}=\frac{27}{59}$$

Άσκηση 8

Αν Α, Β ασυμβίβαστα ενδεχόμενα ενός πειράματος τύχης και η συνάρτηση:

$$\mathbf{f(x)=\frac{1}{2}[P(A)]^2x^2-P(A\cup B)x+}$$
$$\mathbf{+P(B)\cdot\ln x-2(P(A)-1)\sqrt{x}}$$

έχει εφαπτομένη στη γραφική της παράσταση στο σημείο της με τετμημένη $x_0=1$, παράλληλη στο x΄x τότε: $P(A)=1$ **και** $P(B)=0$.

Λύση

Για x > 0,

$$f'(x)=[P(A)]^2x-P(A\cup B)+P(B)\cdot\frac{1}{x}-\frac{P(A)-1}{\sqrt{x}}$$

Θα ισχύει: $f'(1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[P(A)]^2-(P(A)+P(B))+P(B)-P(A)+1=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow[P(A)]^2-2P(A)+1=0\Leftrightarrow[P(A)-1]^2=0$

$\Leftrightarrow P(A)=1$

Επειδή Α, Β ασυμβίβαστα ως γνωστόν ισχύει:

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)\le 1\Leftrightarrow P(B)\le 0$$

Όμως: $P(B)\ge 0$. Άρα P(B) = 0.