ΜΕΛΕΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΣΤΗΝ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

(ΑΡΤΙΑ – ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ, ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ)

Κώστα Βακαλόπουλου

Στο 2ο κεφάλαιο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου γίνεται η μελέτη των συναρτήσεων $f(x)=\alpha x+\beta$, $f(x)=\alpha x^2$ *και* $f(x)=\dfrac{\alpha}{x}$ *και εισάγονται οι έννοιες:*

- *Άρτια και περιττή συνάρτηση.*
- *Μονοτονία συνάρτησης και*
- *Ακρότατα συνάρτησης.*

Οι παραπάνω έννοιες και η μελέτη τους στις συναρτήσεις σκοπό έχουν τη συλλογή πρόσθετων πληροφοριών με στόχο τη χάραξη της γραφικής τους παράστασης με τη μεγαλύτερη δυνατή επιτυχία.

Στο άρθρο αυτό, παράλληλα πάντα με το σχολικό βιβλίο, θα δώσουμε τις παραπάνω έννοιες ανεξάρτητα από τις συγκεκριμένες συναρτήσεις με μεθόδους μελέτης και εφαρμογές ώστε να βοηθηθούν οι μαθητές της Α΄ Λυκείου αλλά και των άλλων τάξεων ώστε να τα εφαρμόσουν και σε άλλες συναρτήσεις σαν αυτές που ζητούνται και στο σχολικό βιβλίο στο τέλος του κεφαλαίου.

1. ΑΡΤΙΑ ΚΑΙ ΠΕΡΙΤΤΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ 1

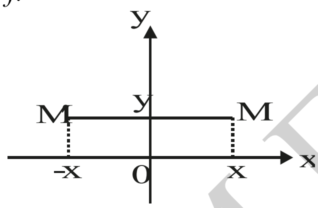
Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A\subseteq\mathbb{R}$ λέγεται ΑΡΤΙΑ αν και μόνο αν για κάθε $x\in A$ ισχύει: $-x\in A$ και $f(-x)=f(x)$.

Π.χ. η συνάρτηση $f(x)=x^2$ είναι άρτια αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Το πρώτο σκέλος του ορισμού μας εξασφαλίζει ώστε κάθε στοιχείο του πεδίου ορισμού της f να έχει το αντίθετό του επίσης στοιχείο στο πεδίο ορισμού (δηλ. να ορίζεται η συνάρτηση και σ' αυτό) και ισχύει όταν το πεδίο ορισμού της f είναι σύνολο ***συμμετρικό*** *ως προς το 0 (μηδέν). Τέτοια σύνολα είναι π.χ.:* $(-1,1)$, $\mathbb{R}^*$, $(-10,-8)\cup(8,10)$ *κ.ά..*

2. Είναι προφανές ότι αν το σημείο $M(x,y)$ *του καρτεσιανού επιπέδου είναι σημείο της γραφικής παράστασης μιας άρτιας συνάρτησης τότε το σημείο* $M'(-x,y)$ *ανήκει επίσης στη γραφική παράσταση της f.*



ΑΡΑ:

Η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης αποτελείται από σημεία **συμμετρικά ως προς τον y΄y**. Δηλαδή, η γραφική παράσταση μιας άρτιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y.

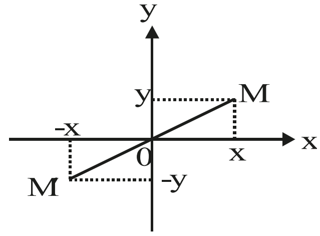
ΟΡΙΣΜΟΣ 2

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $A\subseteq\mathbb{R}$ λέγεται ΠΕΡΙΤΤΗ αν και μόνο αν για κάθε $x\in A$ ισχύει: $-x\in A$ και $f(-x)=-f(x)$.

Π.χ. η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{2}{x}$ είναι περιττή αφού για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει: $-x\in\mathbb{R}^*$ και $f(-x)=\dfrac{2}{-x}=-\dfrac{2}{x}=-f(x)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Είναι φανερό ότι αν το σημείο $M(x,y)$ *του καρτεσιανού επιπέδου είναι σημείο της γραφικής παράστασης μιας περιττής συνάρτησης τότε το σημείο* $M'(-x,-y)$ *ανήκει επίσης στη γραφική παράσταση της f.*



ΑΡΑ:

Η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης αποτελείται από σημεία συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων $O(0,0)$. *Δηλαδή, η γραφική παράσταση μιας περιττής συνάρτησης έχει κέντρο συμμετρίας το σημείο* $O(0,0)$.

2. Αν μια συνάρτηση είναι περιττή και το 0 ανήκει στο πεδίο ορισμού της τότε $f(0)=0$. *Πράγματι, θα ισχύει*

$$f(0)=-f(0)\Leftrightarrow 2\cdot f(0)=0\Leftrightarrow f(0)=0.$$

✓ **ΠΩΣ ΕΛΕΓΧΟΥΜΕ ΑΝ ΜΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΕΙΝΑΙ ΑΡΤΙΑ Ή ΠΕΡΙΤΤΗ;**

(Δηλαδή, πως ελέγχουμε αν η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης έχει άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y ή κέντρο συμμετρίας το σημείο $0(0,0)$*;)*

1ον)*Αν δίνεται ο τύπος της συνάρτησης, τότε:*

- *Βρίσκουμε καταρχήν το πεδίο ορισμού της Α και ελέγχουμε αν αυτό είναι συμμετρικό ως προς το 0 (μηδέν), ώστε για κάθε* $x\in A$ *να ισχύει* $-x\in A$.
- *Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης f στο* $-x$ *δηλ. το* $f(-x)$ *και, αν* $f(-x)=f(x)$ *η συνάρτηση είναι **άρτια** ενώ αν* $f(-x)=-f(x)$ *η συνάρτηση είναι **περιττή**.*

2ον)*Αν δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης τότε: παρατηρούμε το είδος της συμμετρίας που παρουσιάζει και, αν έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y τότε είναι **άρτια** ενώ αν έχει κέντρο συμμετρίας το* $0(0,0)$ *τότε είναι **περιττή**.*

Τα προηγούμενα συμπεράσματα τα χρησιμοποιούμε για να χαράξουμε τη γραφική παράσταση μιας άρτιας ή περιττής συνάρτησης:

Χαράσσουμε μόνο το τμήμα της γραφικής παράστασης που αντιστοιχεί δεξιά ή αριστερά του άξονα y΄y (δηλ. μόνο για $x\geq 0$ *ή* $x\leq 0$ *αντίστοιχα) και το υπόλοιπο τμήμα της γραφικής παράστασης το κατασκευάζουμε συμμετρικό του πρώτου ως προς τον άξονα y΄y για την άρτια και ως προς την αρχή των αξόνων για την περιττή συνάρτηση.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1}{|x|}$

α) Να εξεταστεί αν είναι άρτια ή περιττή.

β) Να χαράξετε τη γραφική παράστασή της.

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι: $A=\mathbb{R}^*$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει:

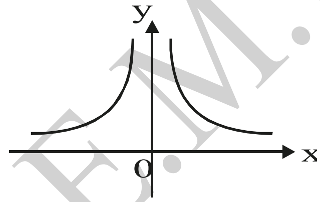
$-x\in\mathbb{R}^*$ ενώ

$$f(-x)=\frac{1}{|-x|}=\frac{1}{|x|}=f(x).$$

Άρα: η συνάρτηση f είναι **άρτια**.

β) Χαράσσουμε λοιπόν τη γραφική παράσταση της f για $x>0$ δηλ. της $f(x)=\dfrac{1}{x}$ και κατασκευάζουμε το συμμετρικό της ως προς τον άξονα y΄y.

Έτσι έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.



(Στο παράδειγμα που ακολουθεί θα χρησιμοποιήσουμε μια συνάρτηση που δεν γνωρίζουν οι μαθητές της Α΄ Λυκείου. Ας το παρακολουθήσουν όμως οι αναγνώστες της Β΄ και Γ΄ Λυκείου).

2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=\ln|x|$.

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=\mathbb{R}^*$ ($|x|>0\Leftrightarrow x\neq 0$).

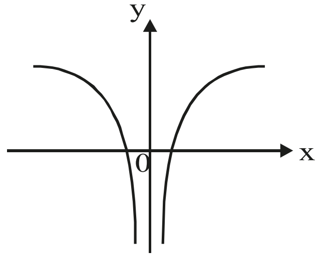
Για κάθε $x\in\mathbb{R}^*$ ισχύει: $-x\in\mathbb{R}^*$ ενώ $f(-x)=\ln|-x|=\ln|x|=f(x)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι **άρτια**.

Τότε $f(x)=\begin{cases}\ln x, & x>0\\ \ln(-x), & x<0\end{cases}$

Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της f για $x>0$ δηλ. της $f(x)=\ln x$, $x>0$ (γνωστή γραφική παράσταση) και κατασκευάζουμε το συμμετρικό της ως προς τον άξονα y΄y.

Έτσι έχουμε τη γραφική παράσταση της f.



3. Να εξετάσετε αν είναι άρτιες ή περιττές οι συναρτήσεις:

α) $\mathbf{f(x)=|x-3|-|x+3|}$

β) $\mathbf{g(x)=\begin{cases}-x^4, & x<0\\ x^4, & x\geq 0\end{cases}}$

Λύση:

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}$.
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $-x\in\mathbb{R}$ και $f(-x)=|-x-3|-|-x+3|=|-(x+3)|-|-(x-3)|=$
$|x+3|-|x-3|=-(|x-3|-|x+3|)=-f(x)$.

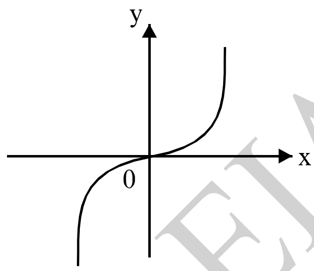
Άρα: η συνάρτηση f είναι **περιττή**.

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A=\mathbb{R}$.
Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $-x\in\mathbb{R}$ ενώ αν $x<0$ τότε $-x>0$ οπότε: $f(-x)=(-x)^4=x^4=-f(x)$, αν $x>0$ τότε $-x<0$ οπότε:

$$f(-x)=-(-x)^4=-x^4=-f(x)$$

και για $x=0$, $f(-0)=0=-f(0)$.

ΑΡΑ Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει $f(-x)=-f(x)$.



Οπότε η συνάρτηση f είναι **περιττή**.

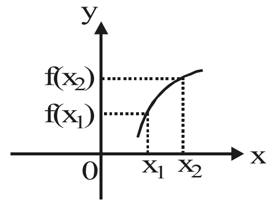
2. ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Η μελέτη της μονοτονίας μιας συνάρτησης μας δίνει πληροφορίες για το αν μεγαλώνοντας οι τιμές του x μεγαλώνουν ή μικραίνουν οι τιμές $f(x)$.

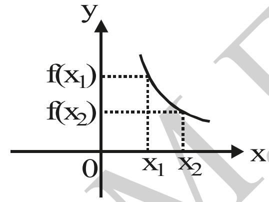
Η γνώση της μονοτονίας μιας συνάρτησης παίζει καθοριστικό ρόλο στη χάραξη της γραφικής της παράστασης αφού θα γνωρίζουμε εκ των προτέρων αν η γραφική της παράσταση είναι ανερχόμενη ή κατερχόμενη.

***Συγκεκριμένα**, θα λέμε ότι μια συνάρτηση* $f:A\to\mathbb{R}$ *είναι:*

***ΓΝΗΣΙΩΣ ΑΥΞΟΥΣΑ** στο Α αν και μόνο αν για κάθε* $x_1,x_2\in A$ *ισχύει: αν* $\mathbf{x_1<x_2}$ *τότε* $\mathbf{f(x_1)<f(x_2)}$.



***ΓΝΗΣΙΩΣ ΦΘΙΝΟΥΣΑ** στο Α αν και μόνο αν για κάθε* $x_1,x_2\in A$ *ισχύει: αν* $\mathbf{x_1<x_2}$ *τότε* $\mathbf{f(x_1)>f(x_2)}$.



*Σε κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις η συνάρτηση f είναι **ΓΝΗΣΙΩΣ ΜΟΝΟΤΟΝΗ**.*

✓ **ΠΩΣ ΜΕΛΕΤΑΜΕ ΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ;**

1^ον) ΜΕ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ

Έστω συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ *και* $x_1,x_2\in A$ *με* $x_1<x_2$ *(1). Προσπαθούμε από τη σχέση (1) να καταλήξουμε αν είναι δυνατόν, σε μια από τις σχέσεις* $f(x_1)<f(x_2)$ *ή* $f(x_1)>f(x_2)$ *οπότε και θα χαρακτηρίσουμε τη συνάρτησή μας ανάλογα γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $\mathbf{f(x)=-x^3+2}$.

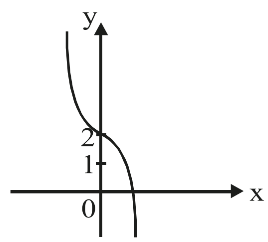
ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $A=\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με

$$x_1<x_2\Leftrightarrow x_1^3<x_2^3\Leftrightarrow -x_1^3>-x_2^3\Leftrightarrow$$

$$-x_1^3+2>-x_2^3+2\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα: η συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο $\mathbb{R}$.



Πολλές φορές η παραπάνω διαδικασία παρουσιάζει δυσκολίες. Δείτε στο επόμενο παράδειγμα πώς το αντιμετωπίζουμε.

2. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση: $f(x)=-x^4+7$.

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι: $A=\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ (1). Προφανώς δεν μπορούμε να υψώσουμε στην 4η δύναμη τα μέλη της (1), αφού αυτό γίνεται μόνο αν x_1, x_2 θετικοί αριθμοί.

Διακρίνουμε προς τούτο τις παρακάτω περιπτώσεις:

- Αν $0\le x_1<x_2$ τότε $x_1^4<x_2^4 \Leftrightarrow -x_1^4>-x_2^4 \Leftrightarrow$

$$-x_1^4+7>-x_2^4+7 \Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2).$$

Άρα: η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,+\infty)$.

- Αν $x_1<x_2\le 0$ τότε

$$-x_1>-x_2\ge 0 \Leftrightarrow (-x_1)^4>(-x_2)^4 \Leftrightarrow x_1^4>x_2^4 \Leftrightarrow$$
$$-x_1^4<-x_2^4 \Leftrightarrow -x_1^4+7<-x_2^4+7 \Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2).$$

Άρα: η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,0]$.

Σημείωση:
Από το προηγούμενο παράδειγμα γίνεται φανερό ότι μια συνάρτηση μπορεί να μην είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της αλλά να είναι γνησίως μονότονη κατά διαστήματα.

2ον) ΜΕ ΤΗ ΔΙΑΦΟΡΑ

Έστω συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ *Για κάθε* $x_1,x_2\in A$ *με* $\boxed{x_1<x_2}\Leftrightarrow x_2-x_1>0$. *Υπολογίζουμε τη διαφορά:* $\Delta=f(x_2)-f(x_1)$ *και*

- *αν* $\Delta>0$ *τότε* $f(x_2)-f(x_1)>0$ *δηλαδή* $\boxed{f(x_1)<f(x_2)}$ *οπότε η συνάρτηση f είναι* ***γνησίως αύξουσα*** *στο Α.*
- *αν* $\Delta<0$ *τότε* $f(x_2)-f(x_1)<0$ *δηλαδή* $\boxed{f(x_1)>f(x_2)}$ *οπότε η συνάρτηση f είναι* ***γνησίως φθίνουσα*** *στο Α.*
- *αν* $\Delta=0$ *τότε* $f(x_2)-f(x_1)=0$ *δηλαδή* $\boxed{f(x_1)=f(x_2)}$. *Τότε η συνάρτηση f είναι* ***σταθερή στο Α.***

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ
Να μελετηθούν ως προς τη μονοτονία οι συναρτήσεις:

α) $f(x)=x^3+x+1$

β) $g(x)=x^2-4x+3$

ΛΥΣΗ

α) Το πεδίο ορισμού της f είναι: $A=\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ δηλαδή $x_2-x_1>0$.

Τότε:

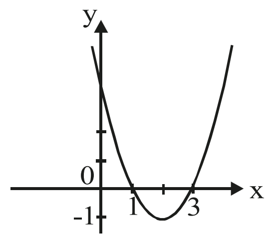
$$\begin{aligned}\Delta=f(x_2)-f(x_1)&=\left(x_2^3+x_2+1\right)-\left(x_1^3+x_1+1\right)\\&=\left(x_2^3-x_1^3\right)+(x_2-x_1)+1-1\\&=(x_2-x_1)\left[\left(x_2^2+x_2x_1+x_1^2\right)+1\right]\end{aligned}$$

Όμως: $x_2^2+x_1x_2+x_2^2\ge 0$. (γιατί;)

Άρα: $x_2^2+x_2x_1+x_1^2+1>0$.

Άρα: $\Delta=f(x_2)-f(x_1)>0$ δηλ. η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Το πεδίο ορισμού της f είναι: $A=\mathbb{R}$. Έστω $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1<x_2$ δηλαδή $x_2-x_1>0$.



Τότε:

$$\begin{aligned}\Delta=f(x_2)-f(x_1)&=\left(x_2^2-4x_2+3\right)-\left(x_1^2-4x_1+3\right)\\&=\left(x_2^2-x_1^2\right)-4(x_2-x_1)+3-3\\&=(x_2-x_1)\left[(x_2+x_1)-4\right]\end{aligned}$$

Για τη μελέτη του προσήμου της παράστασης x_2+x_1-4 διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1η) Αν $2\le x_1<x_2$ τότε $x_1-2\ge 0$ και $x_2-2>0$. Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $x_1+x_2-4>0$.

Άρα: $\Delta > 0$ δηλ. η f είναι γνησίως αύξουσα σο $[2,+\infty)$.

$2^{η}$) Αν $x_1 < x_2 \le 2$ τότε $x_1 - 2 < 0$ και $x_2 - 2 \le 0$. Με πρόσθεση κατά μέλη προκύπτει: $x_1 + x_2 - 4 < 0$.

Άρα: $\Delta < 0$ δηλ. η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,2]$.

$3^{ον}$) ΜΕ ΤΟ ΛΟΓΟ ΜΕΤΑΒΟΛΗΣ

Έστω συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ *Για κάθε* $x_1, x_2 \in A$ *με* $x_1 \ne x_2$ *υπολογίζουμε τον λόγο:* $\lambda = \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ *και:*

- *αν* $\lambda > 0$ *τότε οι διαφορές* $x_1 - x_2, f(x_1) - f(x_2)$ *είναι ομόσημοι αριθμοί π.χ. αν* $x_1 - x_2 < 0$ *τότε θα είναι και* $f(x_1) - f(x_2) < 0$ *δηλ. αν* $x_1 < x_2$ *τότε* $f(x_1) < f(x_2)$ *οπότε η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο A.*
- *αν* $\lambda < 0$ *ομοίως αποδεικνύεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο A και*
- *αν* $\lambda = 0$ *τότε* $f(x_1) = f(x_2)$ *οπότε η f είναι σταθερή στο A.*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση: $\mathbf{f(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0 \\ -2x + 3, & x > 0 \end{cases}}$

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού της f είναι το $A = \mathbb{R}$.

- Για κάθε $x_1, x_2 \in (-\infty, 0]$. (με $x_1 \ne x_2$) τότε:

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} =$$
$$\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2 < 0.$$

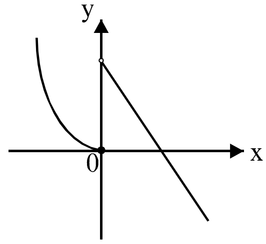
Άρα: η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.

- Για κάθε $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ (με $x_1 \ne x_2$) τότε:

$$\lambda = \frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} = \frac{(-2x_1 + 3) - (-2x_2 + 3)}{x_1 - x_2} =$$
$$\frac{-2(x_1 - x_2)}{x_1 - x_2} = -2 < 0.$$

Άρα: η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$.

- Θα εξετάσουμε αν για κάθε $x_1 < 0$ και $x_2 \ge 0$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$. Αν αυτό συμβαίνει η συνάρτηση θα είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.



Όμως: Για $x_1 = -1$ και $x_2 = \dfrac{1}{2}$ έχουμε: $f(x_1) = (-1)^2 = 1$ και $f(x_2) = -2\dfrac{1}{2} + 3 = 2$ δηλ. με $x_1<x_2$ προκύπτει $f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα η f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$. Είναι όμως γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και επίσης είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$, δηλαδή είναι γνησίως μονότονη κατά διαστήματα.

3. ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

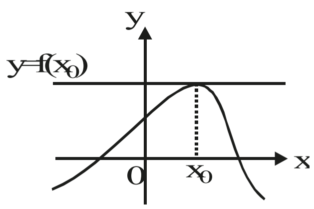
ΟΡΙΣΜΟΣ:

Έστω συνάρτηση f με πεδίο ορισμού $A \subseteq \mathbb{R}$. *Θα λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει στο* $x_0 \in A$

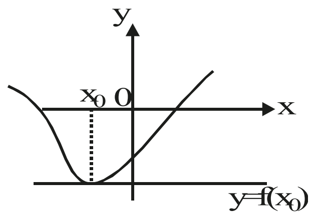
- *Ολικό μέγιστο, αν και μόνο αν,* $f(x) \le f(x_0)$ *για κάθε* $x \in A$ *(1).*
- *Ολικό ελάχιστο, αν και μόνο αν,* $f(x) \ge f(x_0)$ *για κάθε* $x \in A$ *(2).*

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Είναι φανερό ότι αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ *παρουσιάζει στο* $x_0 \in A$ *ολικό μέγιστο τότε η γραφική της παράσταση δεν θα βρίσκεται πάνω από την ευθεία* $y = f(x_0)(\| xx')$.



2. Αντίστοιχα αν μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ *παρουσιάζει στο* $x_0 \in A$ *ολικό ελάχιστο τότε η γραφική της παράσταση δεν θα βρίσκεται κάτω από την ευθεία* $y = f(x_0)(\| xx')$.



✓ ΠΩΣ ΒΡΙΣΚΟΥΜΕ ΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ (ΑΝ ΥΠΑΡΧΟΥΝ) ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ;

1ον) ΜΕ ΤΟΝ ΟΡΙΣΜΟ

Στηριζόμενοι στις ανισοτικές σχέσεις που απορρέουν από τον τύπο της συνάρτησης προσπαθούμε ν' αποδείξουμε μια από τις σχέσεις (1) και (2) του ορισμού.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης $f(x)=3|x-1|+5$.

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού της f είναι $A=\mathbb{R}$. Όμως $f(x)-5=3|x-1|\geq 0$ δηλαδή $f(x)\geq 5$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Όμως:

$5=f(x_0)\Leftrightarrow 5=3|x_0-1|+5\Leftrightarrow |x_0-1|=0\Leftrightarrow x_0=1$
.

Άρα: Ισχύει $f(x)\geq f(1)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$:.

Επομένως: Η συνάρτηση f παρουσιάζει στο 1 ολικό ελάχιστο το 5.

2ον) ΜΕ ΤΗ ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθούν τα ακρότατα (αν υπάρχουν) της συνάρτησης: $f(x)=\sqrt{4-x^2}$.

ΛΥΣΗ

Το πεδίο ορισμού της f είναι:

$A=[-2,2]$ ($4-x^2\geq 0\Leftrightarrow x^2\leq 4\Leftrightarrow \sqrt{x^2}\leq\sqrt{4}\Leftrightarrow$ $|x|\leq 2\Leftrightarrow -2\leq x\leq 2$).

Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

1η) Αν $-2\leq x_1<x_2\leq 0$ τότε

$2\geq -x_1>-x_2\geq 0$

$2^2\geq(-x_1)^2>(-x_2)^2$

$4\geq x_1^2>x_2^2$

$-4\leq -x_1^2<-x_2^2$

$0\leq 4-x_1^2<4-x_2^2$.

Άρα: $\sqrt{4-x_1^2}<\sqrt{4-x_2^2}$ δηλ. $f(x_1)<f(x_2)$.

Άρα: η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-2,0]$.

2η) Αν $0\leq x_1<x_2\leq 2$ τότε $x_1^2<x_2^2\leq 4$

$-x_1^2>-x_2^2\geq -4$

$4-x_1^2>4-x_2^2\geq 0$. Άρα: $\sqrt{4-x_1^2}>\sqrt{4-x_2^2}$ δηλ. $f(x_1)>f(x_2)$.

Άρα: η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0,2]$.

- Από την αλλαγή της μονοτονία της f προκύπτει ότι η συνάρτηση παρουσιάζει στο 0 μέγιστο το $f(0)=2$.
- Επίσης για κάθε $x\in[-2,2]$ ισχύει:

$$\sqrt{4-x^2}\geq 0 \text{ δηλαδή } f(x)\geq 0.$$

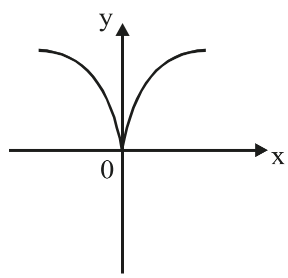
(Όμως $0=f(x_0)\Leftrightarrow 0=\sqrt{4-x_0^2}\Leftrightarrow x_0=\pm 2$).

Άρα: $f(x)\geq f(2)$ και $f(x)\geq f(-2)$ δηλ. η συνάρτηση f παρουσιάζει στο 2 και στο –2 ελάχιστο το 0.

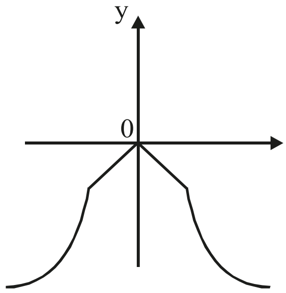
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Να κυκλώσετε το (Σ) αν είναι σωστή ή το (Λ) αν είναι λάθος σε κάθε μια από τις παρακάτω προτάσεις:

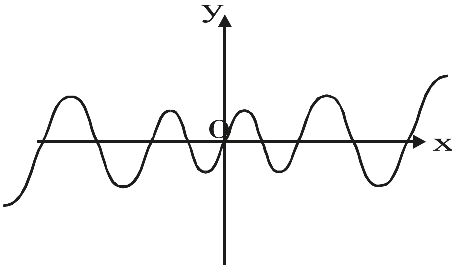
i) Η γραφική παράσταση του σχήματος αντιστοιχεί σε γραφική παράσταση **περιττής** συνάρτησης. Σ Λ



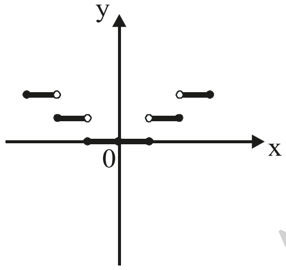
ii) Η γραφική παράσταση του σχήματος αντιστοιχεί σε γραφική παράσταση **άρτιας** συνάρτησης. Σ Λ



iii) Η γραφική παράσταση του σχήματος αντιστοιχεί σε γραφική παράσταση περιττής συνάρτησης. Σ Λ

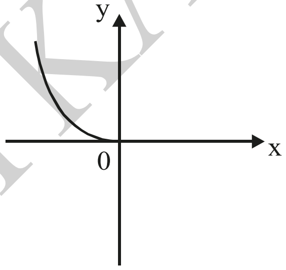


iv) Η γραφική παράσταση του σχήματος αντιστοιχεί σε γραφική παράσταση άρτιας συνάρτησης. Σ Λ

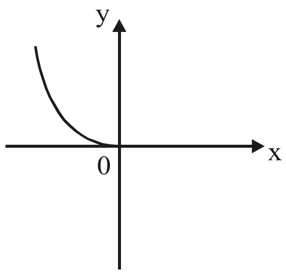


2. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση (το υπόλοιπο τμήμα) των παρακάτω συναρτήσεων αν γνωρίζετε ότι είναι άρτια ή περιττή όπως σημειώνεται κάθε φορά.

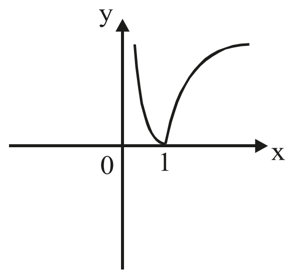
i) Η συνάρτηση f είναι **άρτια**.



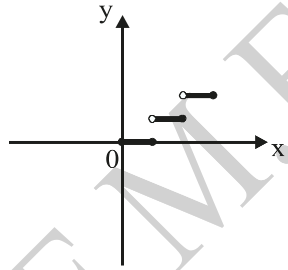
ii) Η συνάρτηση f είναι **περιττή**.



i) Η συνάρτηση f είναι **άρτια**.



ii) Η συνάρτηση f είναι **περιττή**.



3. Να εξεταστεί αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι άρτιες ή περιττές

α) $f(x) = x \cdot |x|$,

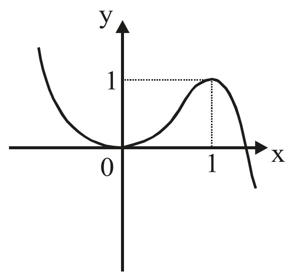
β) $g(x) = x^{\nu} + x^{\nu-2} + 1$, (ν άρτιος αριθμός)

γ) $h(x) = -\sqrt{x^2} + \dfrac{1}{x}$

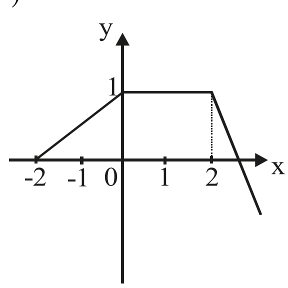
4. Δίνονται οι συναρτήσεις f, g με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Αν η συνάρτηση f είναι άρτια και η g περιττή δείξτε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(g(x))$ είναι άρτια.

5. Με τη βοήθεια των γραφικών τους παραστάσεων να βρείτε τα διαστήματα στα οποία καθεμία από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσα, γνησίως φθίνουσα ή σταθερή.

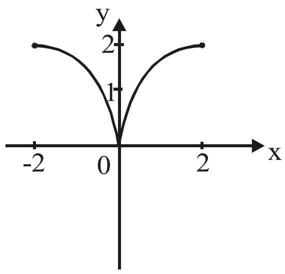
α) $y = f(x)$



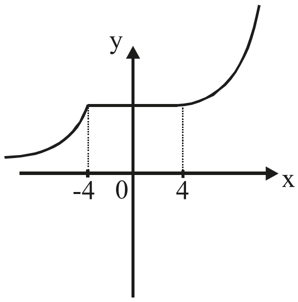
β) $y = g(x)$



γ) $y = h(x)$



δ) $y = \varphi(x)$



6. Ποιες από τις συναρτήσεις της άσκησης 5 παρουσιάζουν ολικά ακρότατα; Να προσδιοριστούν τα ακρότατα αυτά.

7. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 8x + 15$

α) στο διάστημα $(-\infty, 4]$ και β) στο διάστημα $[4, +\infty)$.

8. Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 4x - 5$.

9. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τη συνάρτηση: $h(x) = \begin{cases} x^2 - 2x, & x \le 3 \\ -x + 6, & x > 3. \end{cases}$