Μαθηματικά
για την Α΄ τάξη του Λυκείου

Το τριώνυμο $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$

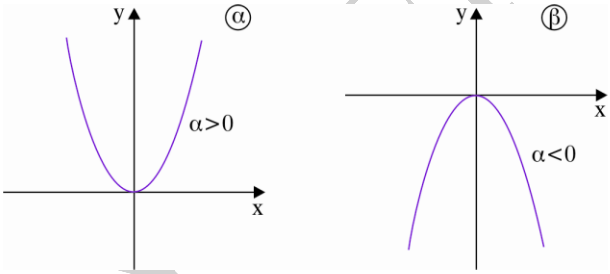
Κώστα Βακαλόπουλου, Νίκου Ταπεινού

Α. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$

Η χάραξη της γραφικής παράστασης μιας γραμμικής συνάρτησης β΄ βαθμού δηλ. της μορφής $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \alpha \neq 0$ (γνωστή ως τριώνυμο) παρουσιάζει για πολλούς μαθητές ιδιαίτερη δυσκολία.

Θα θέλαμε λοιπόν να δώσουμε μερικούς πρακτικούς κανόνες για τη χάραξή της.

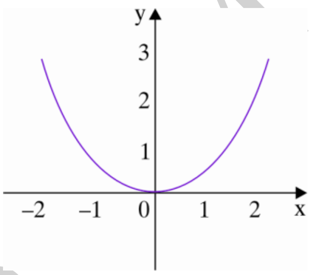
i) Τη γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2$ όλοι την γνωρίζουμε. Είναι ως γνωστόν "παραβολή" με κορυφή την αρχή των αξόνων O(0, 0) και έχει γραφική παράσταση το παρακάτω σχήμα (α) αν $\alpha > 0$ ή το (β) αν $\alpha < 0$.



Για την ακρίβεια των παραπάνω σχημάτων χρειαζόμαστε και έναν πίνακα τιμών.

π.χ. για την συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ έχουμε:

X	-2	1	0	1	2
Y	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \ \alpha \neq 0$ είναι όμοια με την γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2$ όμως μετατοπισμένη παράλληλα με τους άξονες x΄x και ψ΄ψ έτσι ώστε η κορυφή της να εφαρμοστεί στο σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

Για τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \ \alpha \neq 0$ προτείνουμε λοιπόν να χαράσσετε τη γραφική παράστασης της $f(x) = \alpha x^2$ και με διαφανές χαρτί να την μετατοπίζετε έτσι ώστε η κορυφή της από την αρχή των αξόνων O(0, 0) να εφαρμοστεί στο σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$.

Παράδειγμα

Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

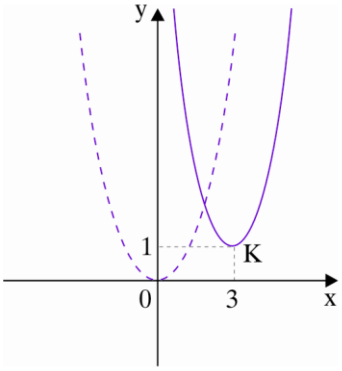
$$f(x) = 2x^2 - 12x + 19,\ \ x \in \mathbb{R}$$

Χαράσσουμε με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών τη γραφική παράσταση της $f(x) = 2x^2$ που ως γνωστόν είναι παραβολή με κορυφή το O(0, 0)

x	0	1	2	3	…
y	0	2	8	18	…

και στη συνέχεια την μετατοπίζουμε ώστε η κορυφή της να συμπέσει με το σημείο Κ(3, 1), αφού $\Delta = 144 - 4\cdot 2\cdot 19 = -8$

- $-\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{-12}{2\cdot 2} = 3$
- $-\dfrac{\Delta}{4\alpha} = -\dfrac{-8}{4\cdot 2} = 1$



ii) Ένας άλλος τρόπος για τη χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ είναι κι αυτός πρακτικός και γίνεται (γνωρίζοντας ότι είναι παραβολή) με τη βοήθεια των τριών σημείων:

1^o σημείο: Η κορυφή $K\left(-\dfrac{\beta}{2\alpha}, -\dfrac{\Delta}{4\alpha}\right)$

2^o σημείο: Το σημείο Α(0, γ). (Είναι το σημείο που η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $\psi'\psi$)

3^o σημείο: Το συμμετρικό Α΄ του σημείου Α ως προς την κατακόρυφη ευθεία: $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$.

Σημείωση:

Στα παραπάνω σημεία μπορεί να προστεθούν (αν υπάρχουν) τα σημεία $M_1(x_1, 0)$ και $M_2(x_2, 0)$ όπου $\mathbf{x_1, x_2}$ οι ρίζες της εξίσωσης f(x) = 0 (στη περίπτωση βέβαια που η διακρίνουσα Δ είναι θετική).

Παράδειγμα

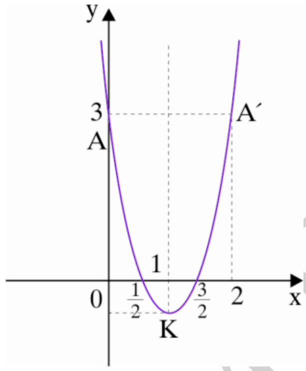
Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x) = 4x^2 - 8x + 3,\ \ x \in \mathbb{R}}$$

Έχουμε: $\alpha = 4$
$\beta = -8$
$\gamma = 3$

- $\Delta = 66 - 16\cdot 3 = 16$
- $-\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{-8}{2\cdot 4} = 1$
- $-\dfrac{\Delta}{4\alpha} = -\dfrac{16}{4\cdot 4} = -1$

Τα σημεία είναι: Κ(1, – 1), Α(0, 3), Α΄(2, 3).



Τα οφέλη από τη χάραξη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης: $\mathbf{f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma,\ \ \alpha \neq 0}$.

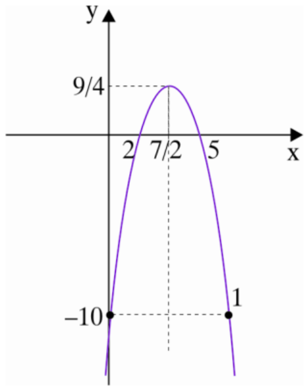
Είναι πολλά! Το κυριότερο όμως είναι η βοήθεια που μας δίνει στην επίλυση πολυωνυμικών ανισώσεων β΄ βαθμού.

π.χ. Οι λύσεις της ανίσωσης $\alpha x^2 + \beta x + \gamma > 0$ είναι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ που βρίσκονται πάνω από τον άξονα x΄x.

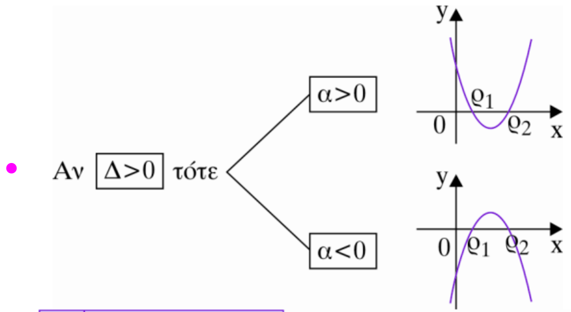
Παράδειγμα

Να λυθεί η ανίσωση: $\mathbf{-x^2 + 7x - 10 > 0}$.

- Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = -x^2 + 7x - 10$ (με έναν από τους παραπάνω τρόπους)
- Λύσεις είναι οι τετμημένες των σημείων της που είναι πάνω από τον άξονα δηλ. 2 < x < 5.



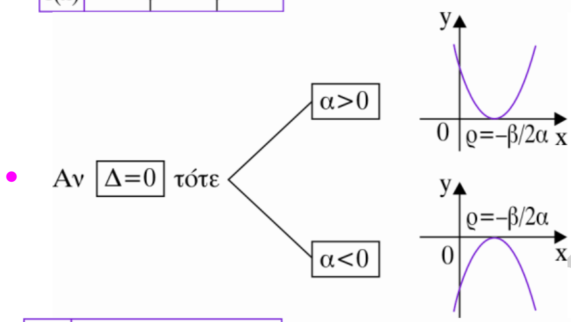
Συμπεράσματα για το πρόσημο του τριωνύμου $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma,\ \alpha\neq 0$



x	$-\infty$	ϱ_1		ϱ_2	$+\infty$
f(x)	+	0	−	0	+

x	$-\infty$	ϱ_1		ϱ_2	$+\infty$
f(x)	−	0	+	0	−

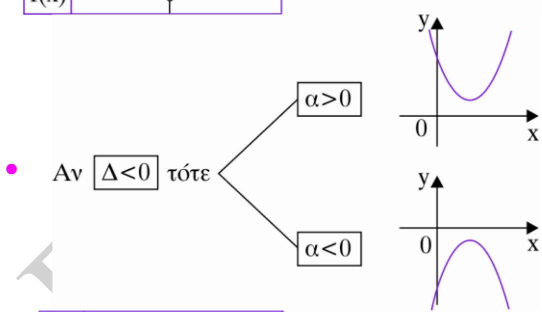
x	$-\infty$	ϱ_1		ϱ_2	$+\infty$
f(x)	ομοσ. α	0	ετερ. α	0	ομοσ. α



x	$-\infty$	ϱ	$+\infty$
f(x)	+	0	+

x	$-\infty$	ϱ	$+\infty$
f(x)	−	0	−

x	$-\infty$	ϱ	$+\infty$
f(x)	ομοσ. α	0	ετερ. α



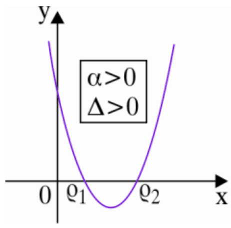
x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	+	

x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	−	

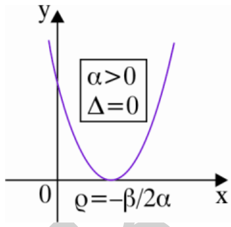
x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)	ομόσημο α	

Παρατηρώντας τις 6 περιπτώσεις της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ μπορείτε να απαντήσετε στο ερώτημα: πότε το τριώνυμο δίνει θετικές και πότε αρνητικές τιμές;

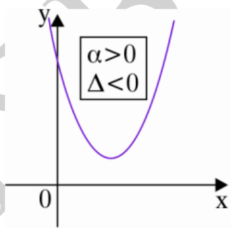
Συμπληρώστε με τα πρόσημα: + ή – τους πίνακες όπως στον πρώτο πίνακα.



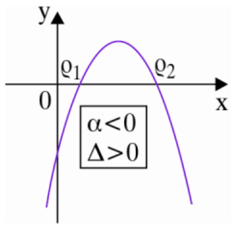
x	$-\infty$	ϱ_1		ϱ_2	$+\infty$
f(x)	+	0	−	0	+



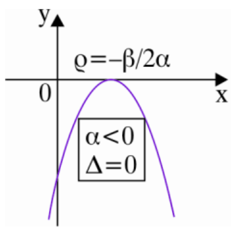
x	$-\infty$	$\varrho=-\beta/2\alpha$	$+\infty$
f(x)		0	



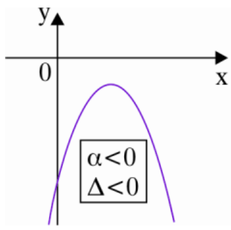
x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)		



x	$-\infty$	ϱ_1		ϱ_2	$+\infty$
f(x)		0		0	



x	$-\infty$	$\varrho=-\beta/2\alpha$	$+\infty$
f(x)		0	



x	$-\infty$	$+\infty$
f(x)		

Β. Πρόσημο τριωνύμου και ανισώσεις

Από τα προηγούμενα προκύπτει ότι:

- Αν $\Delta > 0$ τότε, οι τιμές f(x) είναι ομόσημες του α αν x εκτός των ριζών ($x < \rho_1$ ή $x > \rho_2$) και f(x) ετερόσημες του α, αν x μεταξύ των ριζών ($\rho_1 < x < \rho_2$).
- Αν $\Delta = 0$ τότε, οι τιμές f(x) είναι ομόσημες του α, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \left\{-\frac{\beta}{2\alpha}\right\}$ ($-\frac{\beta}{2\alpha}$ η διπλή ρίζα του τριωνύμου)
- Αν $\Delta < 0$ τότε, οι τιμές f(x) είναι ομόσημες του α, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Πολυωνυμικές ανισώσεις μεγαλύτερου του $2^{ου}$ βαθμού

- Μορφή $\boxed{A(x) > 0 \text{ ή } B(x) < 0}$.

  (A(x), B(x): πολυώνυμα του x).

Παραγοντοποιούμε τα A(x) ή B(x) σε γινόμενο παραγόντων, που καθένας από αυτούς είναι πολυώνυμο το πολύ $2^{ου}$ βαθμού.

Εξετάζουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα και πινακοποιούμε τα αποτελέσματα.

- Μορφή $\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} > 0}$ ή $\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} < 0}$.

  Υποθέτουμε $g(x) \neq 0$.

Λύνουμε τις ισοδύναμες των ανισώσεων αυτών: $f(x)\cdot g(x) > 0$ ή $f(x)\cdot g(x) < 0$ αντίστοιχα και συνεχίζουμε όπως προηγουμένως.

- Μορφή $\boxed{\frac{f(x)}{g(x)} > h(x)} \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} - h(x) > 0 \Leftrightarrow$

  $\frac{f(x) - h(x)\cdot g(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow$

  $\Leftrightarrow [f(x) - h(x)\cdot g(x)]\cdot g(x) > 0$ και συνεχίζουμε όπως προηγουμένως

Ασκήσεις

1. Να λυθεί η ανίσωση: $2x^3 - 5x^2 < 4x - 3$ (1).

Λύση

$$(1) \Leftrightarrow 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3 < 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^3 + 2x^2 - 7x^2 - 7x + 3x + 3 < 0$$
$$\Leftrightarrow 2x^2(x+1) - 7x(x+1) + 3(x+1) < 0$$
$$\Leftrightarrow (x+1)\cdot(2x^2 - 7x + 3) < 0$$

Εξετάζουμε το πρόσημο σε καθ' ένα από τους παράγοντες του γινομένου. $x+1>0 \Leftrightarrow x > -1$.

$$\left.\begin{array}{l} 2x^2 - 7x + 3 > 0 \\ \Delta = 25 > 0 \\ f_{1,2} = \frac{7 \pm 5}{4} = \begin{cases} 3 \\ \frac{1}{2} \end{cases} \\ \alpha = 2 > 0 \end{array}\right\} \text{Άρα } x < \frac{1}{2} \text{ ή } x > 3$$

x	$-\infty$	-1		$1/2$		3	$+\infty$
x+1	−	0	+		+		+
$2x^2-7x+3$	+		+	0	−	0	+
Γινόμενο	−	0	+	0	−	0	+

Επειδή το γινόμενο το θέλουμε αρνητικό, λύσεις της ανίσωσης είναι $x < -1$ ή $\frac{1}{2} < x < 3$.

[Άλλη γραφή των λύσεων: $x \in (-\infty, -1) \cup \left(\frac{1}{2}, 3\right)$]

2. Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{x^2 - 5x + 6}{-x^2 - 3x + 4} \leq 0$ (1).

Λύση

Πρέπει $-x^2 - 3x + 4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$ και $x \neq -4$

$$(1) \Leftrightarrow (x^2 - 5x + 6)(-x^2 - 3x + 4) \leq 0$$

Εξετάζουμε το πρόσημο σε καθ' ένα από τους παράγοντες του γινομένου.

$$\left.\begin{array}{l} x^2 - 5x + 6 > 0 \\ \Delta = 1 > 0 \\ f_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2} = \begin{cases} 3 \\ 2 \end{cases} \\ \alpha = 1 > 0 \end{array}\right\} \text{Άρα: } x < 2 \text{ ή } x > 3$$

$$\left.\begin{array}{l} -x^2 - 3x + 4 > 0 \\ \Delta = 25 > 0 \\ f_{1,2} = \frac{3 \pm 5}{-2} = \begin{cases} 1 \\ -4 \end{cases} \\ \alpha = -1 < 0 \end{array}\right\} \text{Άρα: } -4 < x < 1$$

x	$-\infty$ … -4	-4 … 1	1 … 2	2	2 … 3	3	3 … $+\infty$
x^2-5x+6	+	+	+	0	−	0	+
$-x^2-3x+4$	−	+	−		−		−
Γινόμενο	−	+	−	0	+	0	−

Επειδή το γινόμενο το θέλουμε μικρότερο ή ίσο του μηδενός, λύσεις της ανίσωσης είναι $x<-4$ ή $1<x\le 2$ ή $x\ge 3$.

[Άλλη γραφή των λύσεων:
$x\in(-\infty,-4)\cup(1,2]\cup[3,+\infty)$]

3. Να λυθεί η ανίσωση: $\dfrac{28}{x+3}>x^2-3x+9$ (1)

Λύση

Πρέπει $x+3\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3$

$$(1)\ \Leftrightarrow \frac{28}{x+3}-\left(x^2-3x+9\right)>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{28-(x+3)\left(x^2-3x+9\right)}{x+3}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{28-x^3+3x^2-9x-3x^2+9x-27}{x+3}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^3}{x+3}>0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}{x+3}>0$$

$$\Leftrightarrow (1-x)\left(x^2+x+1\right)(x+3)>0$$

Εξετάζουμε το πρόσημο σε καθ' ένα από τους παράγοντες του γινομένου.

$1-x>0 \Leftrightarrow -x>-1 \Leftrightarrow x<1$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+x+1>0 \\ \Delta=-3<0 \\ \alpha=1>0 \end{array}\right\}\ \text{Άρα } x^2+x+1<0 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

$x+3>0 \Leftrightarrow x>-3$

x	$-\infty$ … -3	-3 … 1	1	1 … $+\infty$
$1-x$	+	+	0	−
x^2+x+1	+	+		+
$x+3$	−	+		+
Γινόμενο	−	+	0	−

Επειδή το γινόμενο το θέλουμε θετικό, λύσεις της ανίσωσης είναι: $-3<x<1$.

[Άλλη γραφή των λύσεων: $x\in(-3,1)$]

4. Να λυθεί η ανίσωση: $\dfrac{7x+11}{x^2-4}\ge -x-5$ (1)

Λύση

Πρέπει $x^2-4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -2$ και $x\neq 2$

$$(1)\ \Leftrightarrow \frac{7x+11}{x^2-4}+x+5\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x+11+(x+5)\left(x^2-4\right)}{x^2-4}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{7x+11+x^3-4x+5x^2-20}{x^2-4}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3+5x^2+3x-9}{x^2-4}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-x^2+6x^2-6x+9x-9}{x^2-4}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x-1)+6x(x-1)+9(x-1)}{x^2-4}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-1)\left(x^2+6x+9\right)}{x^2-4}\ge 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2+6x+9\right)\left(x^2-4\right)\ge 0$$

Εξετάζουμε το πρόσημο σε καθ' ένα από τους παράγοντες του γινομένου.

$x-1>0 \Leftrightarrow x>1$

$$\left.\begin{array}{l} x^2+6x+9>0 \\ \Delta=0 \\ \rho=-\dfrac{6}{2}=-3 \\ \alpha=1>0 \end{array}\right\}\ \begin{array}{l}\text{Άρα: } x^2+6x+9>0 \\ \quad\text{για κάθε } x\in\mathbb{R}-\{-3\}\end{array}$$

$x^2-4>0 \Leftrightarrow x^2>4 \Leftrightarrow |x|>2 \Leftrightarrow x<-2$ ή $x>2$

x	$-\infty$ … -3	-3	-3 … -2	-2 … 1	1	1 … 2	2 … $+\infty$
$x-1$	−		−	−	0	+	+
x^2+6x+9	+	0	+	+		+	+
x^2-4	+		+	−		−	+
Γινόμενο	−	0	−	+	0	−	+

Επειδή το γινόμενο το θέλουμε μη αρνητικό, λύσεις της ανίσωσης είναι
$x=-3$ ή $-2<x\le 1$ ή $x>2$.

[Άλλη γραφή των λύσεων:
$x\in\{-3\}\cup(-2,1]\cup(2,+\infty)$]