ΟΡΙΑ ΕΚΘΕΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΛΟΓΑΡΙΘΜΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Α. Εισαγωγή

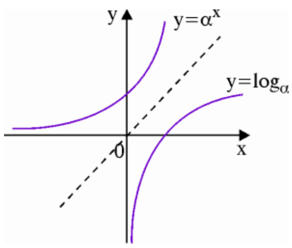
Για τα όρια των εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων στο σχολικό βιβλίο, αναφέρεται ότι προκύπτουν παρατηρώντας τη γραφική παράστασή τους και αξιοποιώντας ότι είναι συνεχείς στα πεδία ορισμού τους.

Επειδή όμως δεν υπάρχουν σχετικές ασκήσεις (στο σχολικό βιβλίο) κρίνουμε σκόπιμο να αναφερθούμε σ' αυτές. Βέβαια το σχολικό βιβλίο θεωρεί (και ως ένα σημείο έχει δίκιο) πως ένα κομμάτι των ασκήσεων αυτών, καλύπτεται από τον κανόνα de l' hospital που θα αναφερθεί στο τέλος του κεφαλαίου του διαφορικού λογισμού. Όμως υπάρχουν όρια λογαριθμικών και εκθετικών συναρτήσεων που δεν υπολογίζονται με τον κανόνα αυτό.

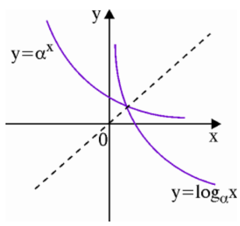
Β. Στοιχεία θεωρίας

1. **Οι γραφικές παραστάσεις των εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων είναι οι εξής:**

Για α > 1



Για 0 < α < 1



Σύμφωνα με τις παραπάνω γραφικές παραστάσεις έχουμε:

Για α > 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = +\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$	$\lim\limits_{x\to0^+} \log_\alpha x = -\infty$

Για 0 < α < 1

$\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \log_\alpha x = -\infty$
$\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to0^+} \log_\alpha x = +\infty$

Σημείωση: *Δεν έχει νόημα η αναζήτηση του ορίου της λογαριθμικής συνάρτησης στο $-\infty$ ή στο 0^- αφού δεν ορίζεται η συνάρτηση σε περιοχές αρνητικών αριθμών.*

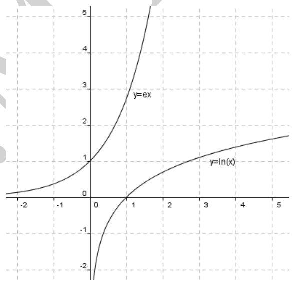
2. **Οι συναρτήσεις $f(x)=\alpha^x\ (\alpha>1)$ και $g(x)=\log_\alpha x\ (0<\alpha\neq1)$ είναι συνεχείς.**

Άρα: $\lim\limits_{x\to x_0} \alpha^x = \alpha^{x_0}$ **για κάθε** $x_0\in\mathbb{R}$ **και**

$\lim\limits_{x\to x_0} \log_\alpha x = \log_\alpha x_0$ **για κάθε** $x_0>0$.

Παραδείγματα

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to x_0} e^x = e^{x_0}$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to x_0>0} \ln x = \ln x_0$



Γ. Ασκήσεις – Μεθοδολογίες

Άσκηση 1:

Να υπολογιστούν τα όρια:

Α) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e^x}{x^3+1}$, **β)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3^x}{1+3^{x+1}}$

γ) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{4^x-3^{x+1}}{4^x+3^{x-1}}$, **δ)** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4^x-3^{x+1}}{4^x+3^{x-1}}$

Λύση

α) Θεωρούμε $x\in(-\infty,0)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to-\infty}(x^3+1)=-\infty$, έχουμε $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3+1}=0$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Άρα: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x^3+1}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^3+1}\cdot e^x\right)=$

$=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x^3+1}\cdot\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\cdot0=0$

β) Θεωρούμε $x\in(0,+\infty)$

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}3^x=+\infty$ το όριο αυτό έχει απροσδιόριστη μορφή $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$.

Όμως: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{1+3^{x+1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3^x}{1+3\cdot3^x}=$

$$\lim \frac{\cancel{3^x}}{\cancel{3^x}\cdot\left(\frac{1}{3^x}+3\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{1}{3^x}+3}=\frac{1}{3}$$

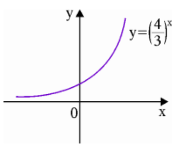
$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{3^x}=0\right)$$

Σημείωση: *Το όριο αυτό θα το υπολογίσουμε στη συνέχεια και με κανόνα de l' Hospital.*

γ) Επειδή: $\lim\limits_{x\to-\infty}4^x=0$ και $\lim\limits_{x\to-\infty}3^x=0$ το όριο αυτό έχει απροσδιόριστη μορφή $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Όμως: $$\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x-3^{x+1}}{4^x+3^{x-1}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{4^x-3\cdot 3^x}{4^x+\frac{1}{3}\cdot 3^x}=$$

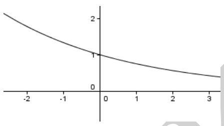
$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{\cancel{3^x}\cdot\left(\frac{4^x}{3^x}-3\right)}{\cancel{3^x}\cdot\left(\frac{4^x}{3^x}+\frac{1}{3}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^x-3}{\left(\frac{4}{3}\right)^x+\frac{1}{3}}$$



$$\overset{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^x=0}{\underset{\frac{4}{3}>1}{=}}\frac{-3}{\frac{1}{3}}=-9$$

δ) Επειδή: $\lim\limits_{x\to+\infty}4^x=+\infty$ και $\lim\limits_{x\to+\infty}3^x=+\infty$ το όριο αυτό στον αριθμητή έχει απροσδιόριστη μορφή $+\infty-\infty$.

Όμως: $$\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x-3^{x+1}}{4^x+3^{x-1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4^x-3\cdot 3^x}{4^x+\frac{1}{3}\cdot 3^x}=$$



$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{4^x}\cdot\left(1-3\cdot\frac{3^x}{4^x}\right)}{\cancel{4^x}\cdot\left(1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3^x}{4^x}\right)}=$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1-3\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x}{1+\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^x}\overset{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^x=0}{\underset{\frac{3}{4}<1}{=}}\frac{1}{1}=1$$

Σημείωση: *Τα παραπάνω όριο δεν υπολογίζονται με κανόνα de l' Hospital.*

Άσκηση 2:

> **Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\lambda^x-2016^x}{\lambda^x+2016^x}$, για κάθε θετική τιμή του λ**

Λύση

Θεωρούμε $x\in(0,+\infty)$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- ***1η περίπτωση:***

Αν $\lambda<2016$ τότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\lambda^x-2016^x}{\lambda^x+2016^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{2016^x}\cdot\left[\left(\frac{\lambda}{2016}\right)^x-1\right]}{\cancel{2016^x}\cdot\left[\left(\frac{\lambda}{2016}\right)^x+1\right]}=$$

$$\overset{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\lambda}{2016}\right)^x=0}{\underset{\frac{\lambda}{2016}<1}{=}}\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{\lambda}{2016}\right)^x-1\right]}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\frac{\lambda}{2016}\right)^x+1\right]}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

- ***2η περίπτωση:***

Αν $\lambda>2016$ τότε:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\lambda^x-2016^x}{\lambda^x+2016^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{\lambda^x}\cdot\left[1-\left(\frac{2016}{\lambda}\right)^x\right]}{\cancel{\lambda^x}\cdot\left[1+\left(\frac{2016}{\lambda}\right)^x\right]}=$$

$$\overset{\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2016}{\lambda}\right)^x=0}{\underset{\frac{2016}{\lambda}<1}{=}}\frac{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-\left(\frac{2016}{\lambda}\right)^x\right]}{\lim\limits_{x\to+\infty}\left[1+\left(\frac{2016}{\lambda}\right)^x\right]}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

- ***3η περίπτωση:***

Αν $\lambda=2016$ τότε η συνάρτηση γίνεται:

$$\frac{(2016)^x-(2016)^x}{(2016)^x+(2016)^x}=0$$

Άρα: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\lambda^x-2016^x}{\lambda^x+2016^x}=0$

Άσκηση 3

> **α) Να υπολογιστεί το όριο: $\lim\limits_{x\to0^+}[(x-1)\cdot\ln x]$**
>
> **β) Έστω η συνάρτηση:**
>
> $$f(x)=\frac{2015\cdot\ln x+2015}{2016\cdot\ln x+2016}$$
>
> **Να βρείτε τα όρια: i) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)$, ii) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$**

Λύση:

α) Θεωρούμε $x\in(0,+\infty)$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to0^+}(x-1)=-1$ και $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$.

Έχουμε: $\lim\limits_{x\to0^+}[(x-1)\cdot\ln x]=+\infty$

β) Θεωρούμε $x \in (0,+\infty)$

i) Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ το όριο έχει απροσδιόριστη μορφή $\left(\dfrac{-\infty}{-\infty}\right)$.

Άρα:

$$\lim_{x\to 0^+} = \frac{2015\cdot \ln x + 2015}{2016\cdot \ln x + 2016} = $$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{\cancel{\ln x}\cdot\left(2015 + 2015\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right)}{\cancel{\ln x}\cdot\left(2016+2016\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right)} \overset{\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{1}{\ln x}=0}{=} \frac{2015}{2016}$$

ii) Επειδή $\lim\limits_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$ το όριο έχει απροσδιόριστη μορφή $\left(\dfrac{+\infty}{+\infty}\right)$.

Άρα:

$$\lim_{x\to +\infty} = \frac{2015\cdot \ln x + 2015}{2016\cdot \ln x + 2016} = $$

$$= \lim_{x\to +\infty} \frac{\cancel{\ln x}\cdot\left(2015 + 2015\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right)}{\cancel{\ln x}\cdot\left(2016+2016\cdot\dfrac{1}{\ln x}\right)} \overset{\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{1}{\ln x}=0}{=} \frac{2015}{2016}$$

Σημείωση: *Τα όρια του ερωτήματος (β) θα το υπολογίσουμε στη συνέχεια και με κανόνα de l' Hospital.*

Άσκηση 4

Να βρεθεί το όριο:

A) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\log\left(3x^2+1\right)-\log\left(x^2+3\right)\right]$

B) $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(3x-1)-3\cdot\ln(x+2)]$

Λύση

A) Θεωρούμε $x\in(2014,+\infty)$.

$$\lim_{x\to+\infty}\log(3x^2+1) \overset{\text{θέτω } u=3x^2+1}{=} \lim_{u\to+\infty}\log u = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log(x^2+2) \overset{\text{θέτω } u=x^2+2}{=} \lim_{u\to+\infty}\log u = +\infty$$

Άρα έχουμε απροσδιόριστη μορφή $(+\infty)-(+\infty)$. Οπότε έχουμε:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\log\left(3x^2+1\right)-\log\left(x^2+3\right)\right] =$$

$$\lim_{x\to+\infty}\log\frac{3x^2+1}{x^2+3} \underset{u_0=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x^2+1}{x^2+3}=3}{\overset{u=\frac{3x^2+1}{x^2+3}}{=}} \lim_{u\to 3}\log u = \log 3$$

B) Θεωρούμε $x\in(2004,+\infty)$.

Επειδή

$$\lim_{x\to+\infty}\ln(3x-1) \overset{\text{θέτω } u=3x-1}{=} \lim_{u\to+\infty}\ln u = +\infty$$

και $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+2) = \ldots = +\infty$, το όριο έχει απροσδιόριστη μορφή: $(+\infty)-(+\infty)$

Όμως: $\lim\limits_{x\to+\infty}[\ln(3x-1)-3\ln(x+2)] =$

$$= \lim_{x\to+\infty}[\ln(3x-1)-\ln(x+2)^3] = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{3x-1}{(x+2)^3}\right]$$

$$\underset{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{(x+1)^3}=0 \quad 1}{\overset{\text{θέτω } u=\frac{3x-1}{(x+2)^3}}{=}} \lim_{u\to 0^+}\ln u = -\infty$$

$$\left[\lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{(x+2)^3} = \lim_{x\to+\infty}\frac{3x-1}{x^3+3x^2\cdot 2+3x\cdot 2^2+2^3} = \right.$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{3x}{x^3} = \lim_{x\to+\infty}\left(3\frac{1}{x^2}\right) = 0$$

$$\left.\text{Επίσης: } u = \frac{3x-1}{(x+2)^3} > 0 \text{ στο } (2004,+\infty) \quad (\text{γιατί;})\right]$$

Παρατηρήσεις:

1) Στον υπολογισμό των παραπάνω ορίων, τα όρια των εκθετικών συναρτήσεων $f(x)=e^x$ κ.λπ. καθώς και της $g(x)=\ln x$ τα «βλέπουμε» στις γραφικές παραστάσεις τους.

2) Στις ασκήσεις 1γ και 2 η επιλογή της ποσότητας, που βγάζουμε κοινό παράγοντα στον αριθμητή και στον παρανομαστή έγινε με κριτήριο: *το όριο που θα προκύψει στη παρένθεση, να είναι 0 και όχι άπειρο ώστε να μην έχουμε πάλι απροσδιοριστία.*

Έτσι στην άσκηση 1γ επειδή το x τείνει

στο $-\infty$, η εκθετική συνάρτηση που θα προκύψει στη παρένθεση πρέπει να έχει βάση μεγαλύτερη της μονάδας. Γι' αυτό βγάλαμε το 3^x ώστε να προκύψει στην παρένθεση: $\left(\frac{4}{3}\right)^x$

όπου ισχύει: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^x=0$ αφού $\frac{4}{3}>1$.

3) Σημειώσαμε στις προηγούμενες ασκήσεις οτι κάποια όρια υπολογίζονται και με τον κανόνα de l' Hospital.

Σύμφωνα μ' αυτόν:

> **Αν το όριο του πηλίκου δύο συναρτήσεων:**
>
> $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ **με** $x_0\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ **είναι της**
>
> **μορφής** $\frac{0}{0}$ **ή** $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ **τότε,**
>
> **αν υπάρχει το όριο:** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **θα ισχύει**
>
> $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **(πεπερασμένο ή άπειρο)**

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Άσκηση 1 (ερώτ. β):

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{1+3^{x+1}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x}{1+3\cdot3^x}\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(3^x)'}{(1+3\cdot3^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3^x\cdot\ln3}{3\cdot3^x\cdot\ln3}=\frac{1}{3}$$

Άσκηση 3 (ερώτ. β):

i) $$\lim_{x\to0^+}\frac{2015\cdot\ln x+2015}{2016\cdot\ln x+2016}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{(2015\cdot\ln x+2015)'}{(2016\cdot\ln x+2016)'}=\lim_{x\to0^+}\frac{2015\cdot\frac{1}{x}}{2016\cdot\frac{1}{x}}=$$

$$=\frac{2015}{2016}$$

ii) $$\lim_{x\to+\infty}\frac{2015\cdot\ln x+2015}{2016\cdot\ln x+2016}\overset{\left(\frac{-\infty}{-\infty}\right)}{=}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2015\cdot\ln x+2015)'}{(2016\cdot\ln x+2016)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2015\cdot\frac{1}{x}}{2016\cdot\frac{1}{x}}=$$

$$=\frac{2015}{2016}.$$