ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2016

ΘΕΜΑ Α

Α.1 Θεωρία (Θεώρημα (ερώτημα (ii), σελίδα 262 σχολικού βιβλίου)
Α.2 Θεωρία (Ορισμός, σελίδα 141 σχολικού βιβλίου)
Α.3 Θεωρία (σελίδα 246 και 247 σχολικού βιβλίου)
Α.4 α) Λ, β) Σ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β.1 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $f'(x) = \ldots = \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)^2}$. Έχουμε:

- $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left(-\infty, 0\right] \subseteq \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left(-\infty, 0\right]$
- $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\left[0, +\infty\right) \subseteq \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, +\infty\right)$.
- Η f παρουσιάζει στο 0 ολικό ελάχιστο τη τιμή: $f(0) = 0$.

Β.2 Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι: $f''(x) = \ldots = \dfrac{2\left(-3x^2+1\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$. Έχουμε:

- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{\sqrt{3}}{3} < x < \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και η συνάρτηση είναι συνεχής στο διάστημα $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$. Άρα είναι ΚΥΡΤΗ στο διάστημα $\left[-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$.
- $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x < -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ή $x > \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ και η συνάρτηση είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα: $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$. Άρα είναι ΚΟΙΛΗ στα διαστήματα: $\left(-\infty, -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right]$ και $\left[\dfrac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.
- Η γραφική παράσταση της f παρουσιάζει σημείο καμπής στα σημεία:
$A\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}, f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{1}{4}\right)$ και $B\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}, f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right) = \dfrac{1}{4}\right)$.

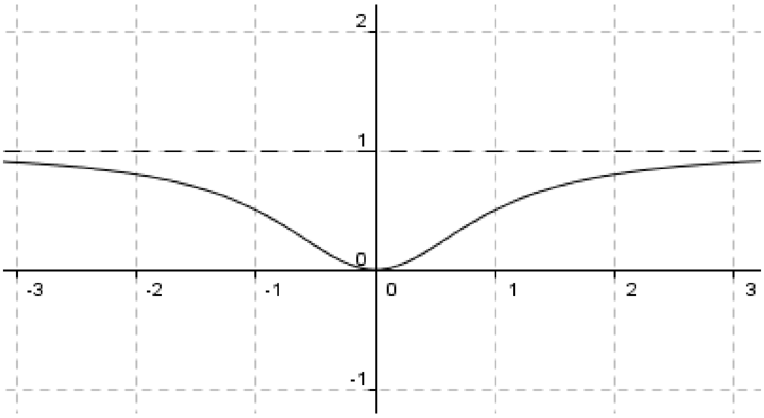
Β.3 <u>ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΕΣ ασύμπτωτες:</u>

Δεν υπάρχουν, αφού έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

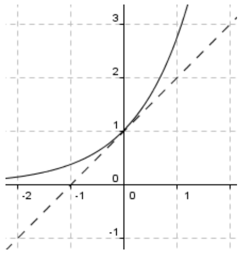
<u>ΟΡΙΖΟΝΤΙΕΣ ασύμπτωτες:</u>

Επειδή: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2+1} = \lim\limits_{x \to \pm\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1$ η ευθεία $y = 1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Β.4



ΘΕΜΑ Γ

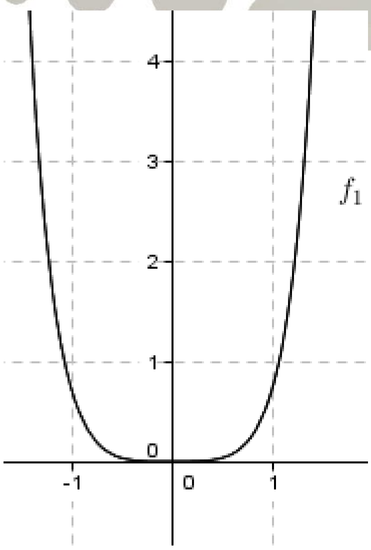


Γ.1 Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=e^x$ που είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$ και έχει εφαπτόμενη στο σημείο $A(0,1)$ την ευθεία $y=x+1$. Άρα για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει: $e^x\geq x+1$ με την ισότητα να ισχύει μόνο για την τετμημένη του σημείου επαφής δηλαδή το 0. Άρα και $e^{x^2}\geq x^2+1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Η ισότητα: $e^{x^2}-x^2-1=0$ ισχύει μόνο για $x^2=0$ δηλαδή μόνο για $x=0$.

Γ.2

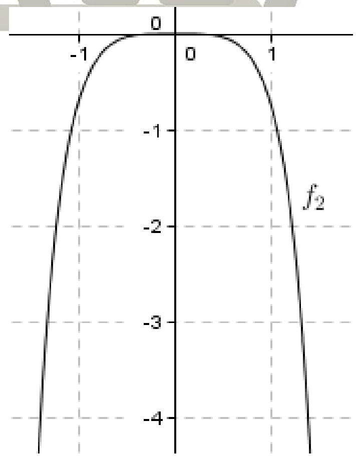
- $f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Leftrightarrow \left(f(x)=e^{x^2}-x^2-1 \text{ ή } f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right)\right)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1)
- $f(x)=0 \Leftrightarrow f^2(x)=0 \Leftrightarrow \left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2=0 \Leftrightarrow e^{x^2}-x^2-1=0 \Leftrightarrow x=0$
- Άρα η συνάρτηση f δεν μηδενίζεται στα διαστήματα $(-\infty,0)$ και $(0,+\infty)$ στα οποία είναι συνεχής οπότε διατηρεί σ' αυτά σταθερό πρόσημο. Άρα υπάρχουν 4 περιπτώσεις: Με θετικές τιμές και στα δύο διαστήματα, με αρνητικές τιμές και στα δύο διαστήματα και με ετερόσημες τιμές στα διαστήματα αυτά. Επειδή $f(0)=0$, σύμφωνα με την (1) έχουμε:

$f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in\mathbb{R}$



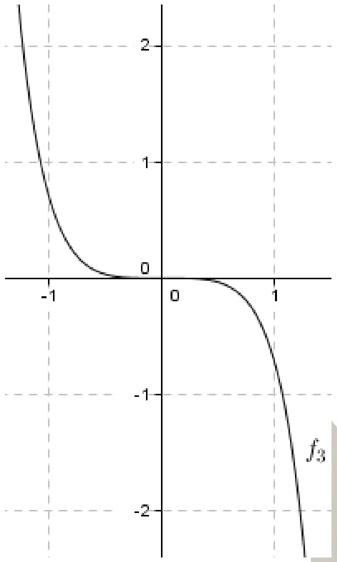
ή

$f(x)=-\left(e^{x^2}-x^2-1\right),\ x\in\mathbb{R}$

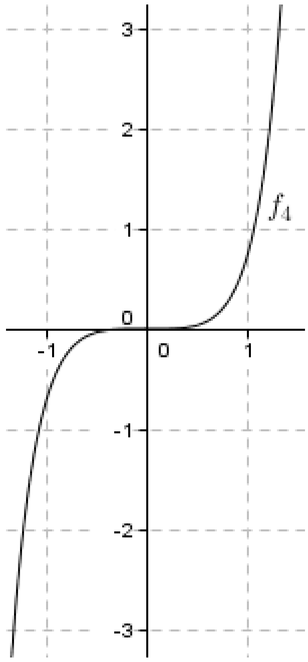


ή

$$f(x)=\begin{cases} e^{x^2}-x^2-1 & ,x<0 \\ -\left(e^{x^2}-x^2-1\right) & ,x>0 \end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases} -\left(e^{x^2}-x^2-1\right) & ,x<0 \\ e^{x^2}-x^2-1 & ,x>0 \end{cases}$$



ή



Γ.3 Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=...=e^{x^2}2x-2x$, $f''(x)=...=2\left(2e^{x^2}\cdot x^2+e^{x^2}-1\right)$. Ισχύει: $e^{x^2}-1>0$ για κάθε $x\neq 0$ οπότε: $f''(x)>0$ για κάθε $x\neq 0$. Επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ οπότε η συνάρτηση f κυρτή στο $\mathbb{R}$.

Γ.4 Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x+3)-f(x)$ $,x\geq 0$. Έτσι η εξίσωση ισοδυναμεί με την: $h\left(|\eta\mu x|\right)=h(x)$ (2). Όμως για κάθε $x\geq 0$, $h'(x)=f'(x+3)-f'(x)$. Επειδή η συνάρτηση f' είναι γνησίως αύξουσα έχουμε: Για κάθε $x\geq 0$, $x+3>x \overset{f'\nearrow \text{στο } [0,+\infty)}{\Rightarrow} f'(x+3)>f'(x)\Rightarrow h'(x)>0$. Όμως η συνάρτηση f΄ είναι συνεχής στο $[0,+\infty)$ οπότε η συνάρτηση h είναι γνησίως αύξουσα οπότε και «1-1» στο $[0,+\infty)$. Έτσι για την εξίσωση (2) ισχύει: $h\left(|\eta\mu x|\right)=h(x)\Leftrightarrow |\eta\mu x|=x=|x|$. Όμως από γνωστό θεώρημα, η ισότητα: $|\eta\mu x|=|x|$ ισχύει μόνο για $x=0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ.1 $\int_0^\pi \left(f(x)+f''(x)\right)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\int f''(x)\eta\mu x dx=\pi$

$\Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\int_0^\pi \left(f'(x)\right)'\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\cancel{\left[f'(x)\eta\mu x\right]_0^\pi}-\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi$

$\cancel{\int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx}-\left(\left[f(x)\sigma\upsilon\nu x\right]_0^\pi-\cancel{\int_0^\pi f(x)\left(-\eta\mu x\right)dx}\right)=\pi \Leftrightarrow -f(\pi)\sigma\upsilon\nu\pi+f(\pi)\sigma\upsilon\nu 0=\pi \Leftrightarrow \boxed{f(\pi)=\pi}$

Επίσης: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\right)=0$. Άρα: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\left(\eta\mu x\right)=1\cdot 0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{\eta\mu x}\eta\mu x\right)=0\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

$\Rightarrow \boxed{f(0)=0}$ αφού η συνάρτηση f είναι συνεχής στο 0. Έτσι, $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$.

Όμως $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}\right)=1\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=1$. Άρα: $\boxed{f'(0)=1}$.

Δ.2 α) Έστω ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0\in\mathbb{R}$. Επειδή το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του $\mathbb{R}$ και η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in\mathbb{R}$ τότε από το θ. FERMAT προκύπτει: $f'(x_0)=0$. Όμως παραγωγίζοντας τη δοσμένη σχέση (η f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$) έχουμε: $e^{f(x)}\cdot f'(x)+1=f'(f(x))\cdot f'(x)+e^x$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Οπότε για $x=x_0$ προκύπτει: $e^{f(x_0)}\cdot f'(x_0)+1=f'(f(x_0))\cdot f'(x_0)+e^{x_0}\Leftrightarrow e^{x_0}=1\Leftrightarrow x_0=0$, άτοπο αφού $f'(0)=1$. Άρα η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$.

β) Αποδείξαμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)\neq 0$. Επειδή η συνάρτηση f' είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, διατηρεί στο $\mathbb{R}$ σταθερό πρόσημο. Όμως $f'(0)=1>0$ οπότε $f'(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Συνεπώς η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ.3 Η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, συνεχής και με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$. Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty \overset{f(x)>0}{\Rightarrow} \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$.

Σημείωση: Το παραπάνω όριο θα μπορούσε να βρεθεί και ως εξής:
Έστω $x>\pi$. Η συνάρτηση f είναι συνεχής στο διάστημα $[\pi,x]$ και παραγωγίσιμη στο διάστημα (π,x). Άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi\in(0,\pi)$ τέτοιο ώστε $f'(\xi)=\frac{f(x)-f(\pi)}{x-\pi}$. Οπότε $f(x)-f(\pi)=f'(\xi)(x-\pi)\Rightarrow f(x)=\pi+f'(\xi)(x-\pi)>f'(\xi)(x-\pi)>0$.

Άρα: $f(x)>f'(\xi)(x-\pi)>0\Rightarrow 0<\frac{1}{f(x)}<\frac{1}{(x-\pi)f''(\xi)}$.

Επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{(x-\pi)f''(\xi)}=0$ από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{f(x)}=0$.

Για κάθε $x\in(\pi,+\infty)$ ισχύει: $\left|\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right|\leq\frac{|\eta\mu x|+|\sigma\upsilon\nu x|}{f(x)}\leq\frac{2}{f(x)}\Rightarrow -\frac{2}{f(x)}\leq\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\leq\frac{2}{f(x)}$

Όμως $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-2\frac{1}{f(x)}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\frac{1}{f(x)}\right)=0$. Άρα από το κριτήριο παρεμβολής προκύπτει ότι: $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}=0$

Δ.4 Θέτουμε $u=\ln x$ οπότε $du=\frac{1}{x}dx$. Επίσης, $x=1\Rightarrow u=0$ και $x=e^{\pi}\Rightarrow u=\pi$. Άρα: $\int_1^{e^{\pi}}\frac{f(\ln x)}{x}dx=\int_0^{\pi}f(u)du$. Οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι: $0<\int_0^{\pi}f(u)du<\pi^2$ ή καλύτερα: $0<\int_0^{\pi}f(x)dx<\pi^2$. Έχουμε: $0\leq x\leq\pi \overset{\text{η f γνησίως αύξουσα}}{\Rightarrow} f(0)\leq f(x)\leq f(\pi)\Rightarrow 0\leq f(x)\leq\pi$. Όμως η f είναι «1-1» οπότε τις τιμές 0 και π τις παίρνει μόνο για $x=0$ και $x=\pi$ αντίστοιχα. Άρα ισχύει: $0\leq f(x)\leq\pi\Rightarrow\int_0^{\pi}0dx<\int_0^{\pi}f(x)<\int_0^{\pi}\pi dx\Rightarrow 0<\int_0^{\pi}f(x)<\pi(\pi-0)\Rightarrow 0<\int_0^{\pi}f(x)<\pi^2$

Κώστας Βακαλόπουλος , Μαθηματικός, MSc in Statistics