Επαναληπτικές Ασκήσεις Γεωμετρίας Α΄ Λύκειου

Γιάννης Κυριαζής – Κωστά Βακαλόπουλος

Άσκηση 1

Θεωρούμε 2 τρίγωνα και για τα οποία ισχύει ότι:

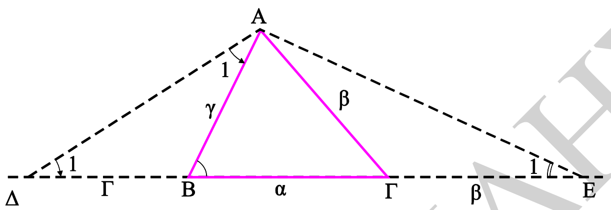
α) $\hat{B}=\hat{B}'$

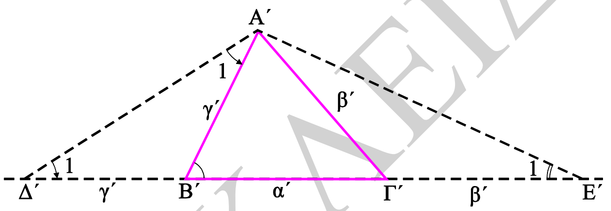
β) $\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}'$

γ) 2r=2r΄, όπου 2r,2r΄ οι περίμετροι των δυο τριγώνων. Να δείξετε ότι είναι ίσα.

Απόδειξη:

Στην της ΓΒ προς το Β θεωρούμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΒΔ=ΑΒ=γ και στην προέκταση της ΒΓ, προς το Γ σημείο Ε, τέτοιο ώστε ΓΕ=ΑΓ=β. Αντίστοιχα στην προέκταση της Β΄Γ΄ σημεία Δ΄ και Ε΄, τέτοια ώστε Β΄Δ΄=Α΄Β΄=γ΄ και Γ΄Ε΄=Α΄Γ΄=β΄.





Είναι φανερό ότι ΔΕ=2r=2r΄=Δ΄Ε΄. Στο ισοσκελές τρ. ΑΒΔ $\hat{B}$ εξωτερική οπότε $\hat{B}=\hat{\Delta}_1+\hat{E}_1=\hat{\Delta}_1+\hat{\Delta}_1=2\hat{\Delta}_1\Rightarrow\hat{\Delta}_1=\frac{\hat{B}}{2}$.

Με ανάλογο τρόπο προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1'=\frac{\hat{B}'}{2}$, $\hat{E}_1=\frac{\hat{\Gamma}}{2}$ και $\hat{E}_1'=\frac{\hat{\Gamma}'}{2}$. Τότε όμως: τρ. ΑΔΕ= τρ. Α΄Δ΄Ε΄ γιατί:

1. $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_1'$ ή $\frac{\hat{B}}{2}=\frac{\hat{B}'}{2}$.
2. ΔΕ=Δ΄Ε΄ ή 2τ=2τ΄ υπόθεση
3. $\hat{E}_1=\hat{E}_1'$ ή $\frac{\hat{\Gamma}}{2}=\frac{\hat{\Gamma}'}{2}$ μισά ίσων γωνιών

Κριτήριο 2 Γ–Π–Γ

Επομένως ΑΔ=Α΄Δ΄ (1) και ΑΕ=Α΄Ε΄ (2) ομόλογα στοιχεία των ίσων τριγώνων

τρΑΒΔ=τρ.Α΄ Β΄Δ΄ γιατί:

1. $\hat{A}_1=\hat{A}_1'$ ή $\frac{\hat{B}}{2}=\frac{\hat{B}'}{2}$.
2. ΑΔ=Α΄Δ΄ από τη σχέση (1)
3. $\hat{\Delta}_1=\hat{\Delta}_1'$ ή $\frac{\hat{B}}{2}=\frac{\hat{B}'}{2}$ μισά ίσων γωνιών

Κριτήριο 2 Γ–Π–Γ⇒ΑΒ=Α΄Β΄ή γ=γ΄ (3)

Όμοια τρ.ΑΓΕ=τρ Α΄Γ΄Ε΄ οπότε ΑΓ=Α΄Γ΄΄ ή β=β΄ (4)

Επίσης $\hat{A}=\hat{A}'$ (5) κατ' ανάγκη

Από 3,4,5⇒τρ.ΑΒΓ=τρ.Α΄Β΄Γ΄ σύμφωνα με κριτήριο 1 Π–Γ–Π.

Άσκηση 2

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, τυχαίο σημείο αυτού Μ και 2 παράλληλες ημιευθείες Αx και Βψ στο ίδιο ημιεπίπεδο.

Στην Αx θεωρούμε σημείο Δ, τέτοιο ώστε ΑΔ=ΑΜ (1) και στην Βψ σημείο Ε τέτοιο ώστε ΒΕ=ΒΜ (2).

α) Να δείξετε ότι $\Delta\hat{M}E=90^o$

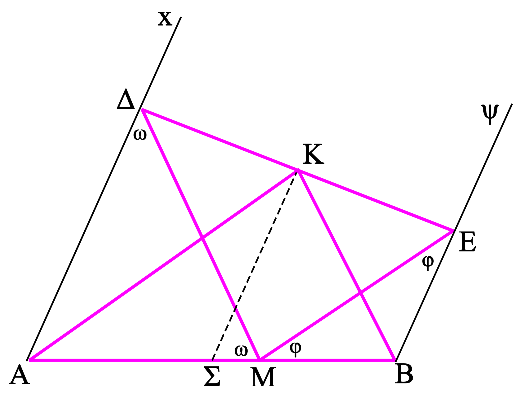
β) Αν κ είναι το μέσο της ΔΕ να δείξετε επίσης ότι: $A\hat{K}B=90^o$

Απόδειξη:

Συντομότερα:

$$\omega+\varphi=\frac{180-A}{2}+\frac{180-B}{2}=180-\frac{A+B}{2}=180-\frac{180}{2}=90^o$$

.



β) Έστω Σ το μέσο του ΑΒ.

Στο τραπέζιο ΑΔΕΒ ΚΣ διάμεσος. Από θεώρημα έχουμε ΚΣ//ΑΔ//ΒΕ και $\text{Κ}\Sigma = \dfrac{\text{ΑΔ}+\text{ΒΕ}}{2} \overset{1,2}{\Rightarrow} \text{Κ},\Sigma = \dfrac{\text{ΑΜ}+\text{ΒΜ}}{2} \Rightarrow \text{Κ}\Sigma = \dfrac{\text{ΑΒ}}{2}$.

Τότε όμως $\text{Α}\hat{\text{Κ}}\text{Β} = 90^\circ$ αφού στο τρ. ΑΚΒ η διάμεσος ΚΣ είναι ίση με το μισό της αντίστοιχης πλευράς ΑΒ.

Άσκηση 3

Δίνεται τρ. ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ οι διχοτόμοι αυτού ΑΔ και ΓΕ που τέμνονται στο Ι (έγκεντρο). Να δείξετε ότι:

α) $\text{Β}\hat{\text{Ι}}\Gamma = 90^\circ + \dfrac{\hat{\text{Α}}}{2}$

β) $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = 90^\circ - \dfrac{\hat{\text{Β}}-\hat{\Gamma}}{2}$

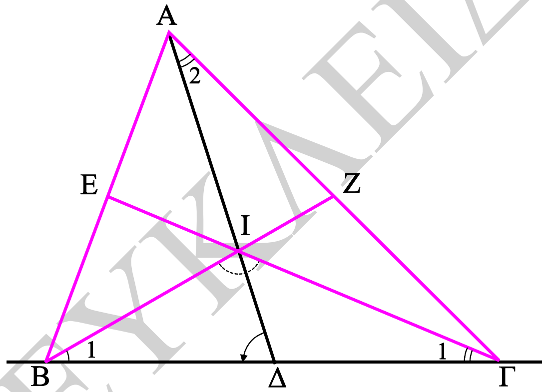
γ) Αν τρ. ΑΒΓ αμβλυγώνιο στο Β και ισχύει ότι $\hat{\text{Β}}-\hat{\Gamma} = 90^\circ$ (1)να αποδειχθεί ότι η διχοτόμος ΑΔ σχηματίζει με τη βάση ΒΓ γωνία 45°.

Απόδειξη

α) Από το τρ.ΒΙΓ έχουμε ότι:

$$\hat{\text{Β}}_1 + \text{Β}\hat{\text{Ι}}\Gamma + \hat{\Gamma}_1 = 180^\circ \Rightarrow \frac{\hat{\text{Β}}}{2} + \text{Β}\hat{\text{Ι}}\Gamma + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90^\circ + 90^\circ \Rightarrow$$

$$\text{Β}\hat{\text{Ι}}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{\text{Α}}}{2} + \frac{\hat{\text{Β}}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} - \frac{\hat{\text{Β}}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow \text{Β}\hat{\text{Ι}}\Gamma = 90^\circ + \frac{\hat{\text{Α}}}{2}.$$



β) $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β}$ εξωτερική του τρ. ΑΔΓ επομένως:

$$\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = \hat{\text{Α}}_2 + \hat{\Gamma} \Rightarrow \text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = \frac{\hat{\text{Α}}}{2} + \hat{\Gamma} \Rightarrow$$

$$\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = 90^\circ - 90^\circ + \frac{\hat{\text{Α}}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow$$

$$\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = 90^\circ - \frac{\hat{\text{Α}}}{2} - \frac{\hat{\text{Β}}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{\text{Α}}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow$$

$$\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = 90^\circ - \frac{\hat{\text{Β}}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} \Rightarrow \text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = 90^\circ - \left(\frac{\hat{\text{Β}}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = 90^\circ - \frac{\hat{\text{Β}}-\hat{\Gamma}}{2}.$$

γ) Από το β) ερώτημα έχουμε ότι

$$\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = 90^\circ - \frac{\hat{\text{Β}}-\hat{\Gamma}}{2} \overset{1}{\Rightarrow} \text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} \Rightarrow$$

$$\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = 90^\circ - 45^\circ \Rightarrow \text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = 45^\circ.$$

Άσκηση 4

Θεωρούμε ισοσκελές τρ. ΑΒΓΑ Β=Αγ με γωνία κορυφής $\hat{\text{Α}} = 20^\circ$.

Στο εσωτερικό του τριγώνου φέρουμε ευθύγραμμα τμήματα ΒΔ (Δ σημείο της ΑΓ) και ΓΕ (Ε σημείο της ΑΒ) τέτοια ώστε $\text{Α}\hat{\text{Β}}\Delta = 20^\circ$ και $\text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε} = 30^\circ$

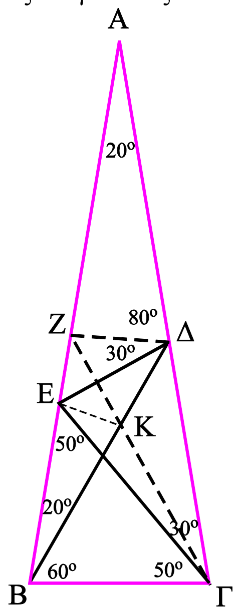
Να υπολογισθεί η γωνία $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Ε} = \hat{x}$

Σημείωμα: Η άσκηση αυτή είχε προταθεί τη δεκαετία του 1980 από το συνάδελφο κ. Νίκο Κισκύρα στη μνήμη του οποίου αφιερώνεται.

Απάντηση

Φέρουμε DZ//ΒΓ βοηθητική.

Τότε το ΔΖΒΓ ισοσκελές τραπέζιο με ΒΖ=ΓΔ και επομένως ίσες διαγώνιους ΒΔ=ΓΖ.



Από τα ίσα τρίγωνα $\overset{\triangle}{\Delta\text{Β}\Gamma}$ και $\overset{\triangle}{\text{Ζ}\text{Β}\Gamma}$ προκύπτει ότι: $\Delta\hat{\text{Β}}\Gamma = \text{Ζ}\hat{\Gamma}\text{Β} = 60^\circ$ οπότε τρ. ΚΒΓ ισόπλευρο όπως επίσης και το τρ. ΚΔΖ.

$\text{Β}\hat{\text{Ε}}\Gamma$ Εξωτερική του τρ. ΕΑΓ επομένως

$$\text{Β}\hat{\text{Ε}}\Gamma = \hat{\text{Α}} + \text{Α}\hat{\Gamma}\text{Ε} = 20^\circ + 30^\circ = 50^\circ$$

Τότε όμως $B\hat{E}\Gamma = B\hat{\Gamma}E = 50^o$ δηλ. τρ. ΒΕΓ ισοσκελές με ΒΕ=ΒΓ (1) και ΒΓ=ΚΓ=ΚΒ (2) πλευρές του ισόπλευρου τρ. ΚΒΓ.

Από (1) και (2) ⇒ΒΕ=ΒΚ⇒τρ.ΒΕΚ ισοσκελές με γωνία κορυφής 20^o οπότε $E\hat{K}B = 80^o$. Άρα $E\hat{K}Z = 180^o - \left(60^o + 80^o\right) = 40^o$.

Αλλά και $E\hat{Z}K = 20^o + 20^o = 40^o$ αφού είναι εξωτερική γωνία στο τρ. ΑΖΓ. Τότε όμως τρ. ΕΖΚ ισοσκελές με ΕΖ=ΕΚ (3)τρ.ΕΖΔ=τρ.ΕΔΚ γιατί

1. ΔΕ=ΔΕ κοινή
2. ΕΖ=ΕΚ από σχέση (3)
3. ΔΖ=ΔΚ πλευρές του ισόπλευρου τρ.ΚΔΖ, (Κριτήριο 3 Π–Π–Π)

Άρα $E\hat{\Delta}Z = E\hat{\Delta}K = \frac{Z\hat{\Delta}K}{2} = \frac{60^o}{2} = 30^o$ οπότε

$$A\hat{\Delta}E = A\hat{\Delta}Z + Z\hat{\Delta}E = 80^o + 30^o = 110^o.$$

Άσκηση 5

Δίνεται ορθογώνιο τρ. ΑΒΓ. Αν ΑΔ είναι το ύψος του ΑΕ η διχοτόμος και ΑΜ η διάμεσος να δείξετε ότι:

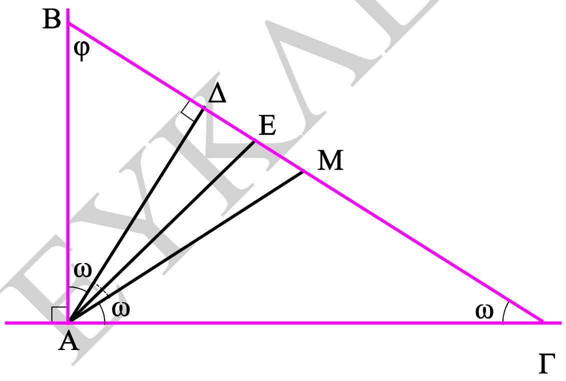
α) ΑΕ η διχοτόμος της $\Delta\hat{A}M$

β) Αν $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$ τότε $\hat{\Gamma} = 30^o$

Απόδειξη

Α) Στο ορθογώνιο τρ. ΑΒΓΑ Μ είναι διάμεσος προς την υποτείνουσα ΒΓ. Από θεώρημα έχουμε:

$$AM = \frac{B\Gamma}{2} = MB = M\Gamma \quad (1)$$



Τότε όμως τρ. ΜΑΓ ισοσκελές με $M\hat{\Gamma}A = M\hat{A}\Gamma = \hat{\omega}$ όπως επίσης και το τρ. ΜΑΒ με $M\hat{B}A = M\hat{A}B = \hat{\varphi}$. Όμως $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}B = \hat{\omega}$ οξείες με πλευρές κάθετες και (ΑΕ διχοτόμος). Τότε όμως $E\hat{A}\Delta = E\hat{A}\mu = 45^o - \hat{\omega}$ διαφορές ίσων γωνιών οπότε ΑΕ διχοτόμος της $\Delta\hat{A}M$.

β) Από υπόθεση έχουμε:

$$\Delta M = \frac{B\Gamma}{4} = \frac{1}{2}\cdot\frac{B\Gamma}{2} \overset{1}{\Rightarrow} \Delta M = \frac{1}{2}AM = \frac{AM}{2}.$$

Στο ορθ. Τρ.ΔΑΜ ισχύει $\Delta M = \frac{AM}{2}$. Από θεώρημα έχουμε $M\hat{A}\Delta = 30^o$ επομένως

$$\Delta\hat{M}A = 60^o.$$

Όμως εξωτερική του τρ. ΜΓΑ οπότε

$$\Delta\hat{M}A = \hat{\omega} + \hat{\omega} \Rightarrow 60^o = 2\hat{\omega} \Rightarrow \hat{\omega} = \frac{60^o}{2} = 30^o \Rightarrow \hat{\Gamma} = 30^o$$

οεδ.

Άσκηση 6

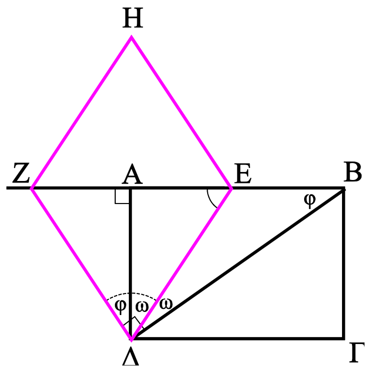
Δίδεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Στο σημείο Δ υψώνουμε κάθετη επί την ΔΒ που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Φέρουμε τη διχοτόμο ΔΕ της $A\hat{\Delta}B$ και κατασκευάζουμε το παραλληλόγραμμο ΕΔΖΗ. Να δείξετε ότι:

α) τρ.ΕΔΖ ισοσκελές.

β) Αν 2ΔΖ–ΑΖ=ΓΔ τότε το ΔΕΗΖ είναι ρόμβος.

Απόδειξη.

α) $A\hat{\Delta}E = E\hat{\Delta}B = \hat{\omega}$, ΔΕ διχοτόμος $A\hat{B}\Delta = A\hat{\Delta}Z = \hat{\varphi}$ οξείες με πλευρές κάθετες $Z\hat{E}\Delta$ εξωτερική του τρ.ΕΒΔ επομένως: $Z\hat{E}\Delta = E\hat{\Delta}B + E\hat{B}\Delta = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$.



Τότε $Z\hat{\Delta}E = Z\hat{E}\Delta = \hat{\omega} + \hat{\varphi}$. Άρα τρ.ΖΔΕ ισοσκελές με ΖΔ=ΖΕ.

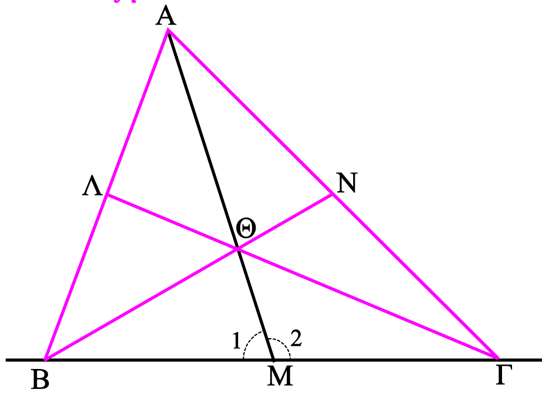
β) Έστω ότι 2ΔΖ–ΑΖ=ΓΔ⇔2ΔΖ=ΓΔ+ΑΖ⇔ 2ΔΖ=ΒΖ⇔ $\Delta Z = \frac{BZ}{2}$.

Στο ορθ. τρ. ΖΔΒ ισχύει $\Delta Z = \frac{BZ}{2}$. Από θεώρημα $\hat{\varphi} = 30^o$ οπότε $B\hat{Z}\Delta = 60^o$. Επομένως το ισοσκελές τρ. ΔΕΖ είναι ισόπλευρο. Τότε όμως ΖΔ=ΔΕ οπότε ΕΔΖΗ ρόμβος αφού είναι παραλληλόγραμμο με δυο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Άσκηση 7

Σε κάθε τρ. ΑΒΓ να δείξετε ότι $\beta>\gamma \Leftrightarrow \mu_\beta<\mu_\gamma$

Απόδειξη το ευθύ:



Το τρ. ΑΒΜ και το τρ.ΑΜΓ έχουν:
1.ΑΜ=ΑΜ κοινή πλευρά
2. ΜΓ=ΜΓ Μ μέσο ΒΓ
3. ΑΒ<ΑΓ ή γ<β υπόθεση

Από εφαρμογή ανισοτικών σχέσεων τριγώνου έχουμε $\hat{M}_1<\hat{M}_2$ (1)

Το τρ. ΒΘΜ και το τρ. ΘΓΜ έχουν:
1. ΘΜ=ΘΜ κοινή πλευρά
2. ΜΓ=ΜΓ Μ μέσο ΒΓ
3. $\hat{M}_1<\hat{M}_2$ από σχέση (1)

Από την ίδια εφαρμογή προκύπτει ότι ΒΘ<ΘΓ (Θ βαρύκεντρο) $\Rightarrow \frac{2}{3}\mu_\beta<\frac{2}{3}\mu_\gamma \Rightarrow \mu_\beta<\mu_\gamma$ οεδ.

Το αντίστροφο αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο.

Στις ασκήσεις που ακολουθούν μπορείτε να παρακολουθήσετε την εξέλιξη των αποδείξεων μερικών «Επώνυμων» προτάσεων όπως είναι η ευθεία SIMSON, η ευθεία EULER και ο κύκλος του EULER. Πριν από την τελική άσκηση που διατυπώνεται η κάθε μια πρόταση από αυτές, προηγούνται όσες ασκήσεις – προτάσεις συμβάλουν στην απόδειξή τους. Υπάρχουν επίσης και μερικές ασκήσεις – εφαρμογές τους.

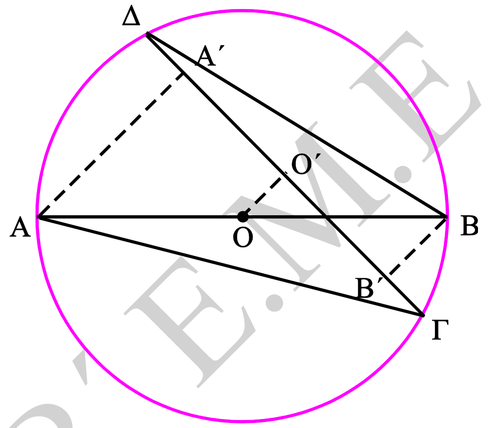
Όλες όμως οι ασκήσεις αποτελούν και αυτοτελείς προτάσεις με τις οποίες μπορείτε να κάνετε μια πολύ καλή επανάληψη ειδικά στα τελευταία κεφάλαια της ύλης σας όπως είναι τα κεφάλαια 5 και 6 του σχολικού σας βιβλίου. Καλό διάβασμα λοιπόν.

Άσκηση 2

Δίνεται κύκλος Ο διαμέτρου ΑΒ και χορδή ΓΔ που τέμνει την ΑΒ. Να δείξετε ότι οι προβολές των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΓ και ΒΔ στην ευθεία ΓΔ είναι ίσες.

Λύση

Έστω Α΄και Β΄οι προβολές των Α και Β στη ΔΓ. Αν Ο΄η προβολή του κέντρου του κύκλου στην ΔΓ και Ο΄ανήκει στις προβολές των ΑΓ και ΒΔ (σχ 1) θα δείξουμε ότι: ΓΑ΄ΔΒ.



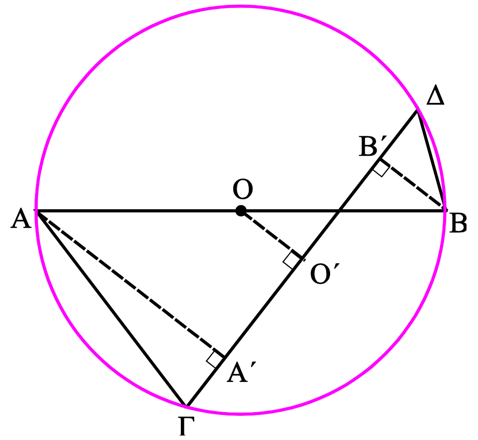
Όμως: Ο΄το μέσο της ΓΔ(ΟΟ΄απόστημα στη χορδή ΓΔ) Οπότε:Ο΄Γ=Ο΄Δ(1)

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι:Ο΄Α΄=Ο΄Β΄(2)

Πράγματι: Στο τραπέζιο ΑΑ΄ΒΒ΄το Ο είναι μέσο της διαγωνίου ΑΒ και το ΟΟ¨παράλληλο στις βάσεις ΑΑ΄και ΒΒ¨(ως κάθετα στην ίδια ευθεία). Άρα θα τμήσει στο μέσο και την Α΄Β΄. Επομένως: Ο΄Α΄=Ο΄Β΄(2)

Προσθέτοντας κατά μέλη τος (1) και (2) έχουμε: Ο΄Α΄+Ο΄Γ=Ο΄Β΄+Ο΄Δ⇔ΓΑ΄=ΔΒ΄.

Αν Ο΄η προβολή του κέντρου του κύκλου στη ΓΔ και Ο΄δεν ανήκει στις προβολές των ΑΓ και ΒΔ θα δείξουμε ότι:ΓΑ΄=ΔΒ΄.

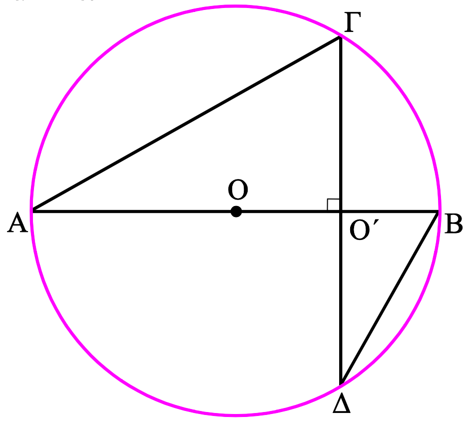


Πάλι όμως ισχύει ότι:
Ο΄Γ=Ο΄Δ(1) και Ο΄Α΄=Ο΄Β΄(2)

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2) έχουμε:

Ο΄Γ–Ο΄Α΄=Ο΄Δ–Ο΄Β΄⇔ΓΑ΄=ΔΒ΄.

Στην περίπτωση που είναι $\Gamma\Delta \perp AB$, τότε η προβολή των ΑΓ και ΔΒ στην ΓΔ είναι τα τμήματα Ο΄Γ και Ο΄Δ, όπου Ο΄το σημείο τομής της ΓΔ με την ΑΒ, Όμως Ο΄Γ=Ο΄Δ αφού ΟΟ΄το απόστημα της ΓΔ.

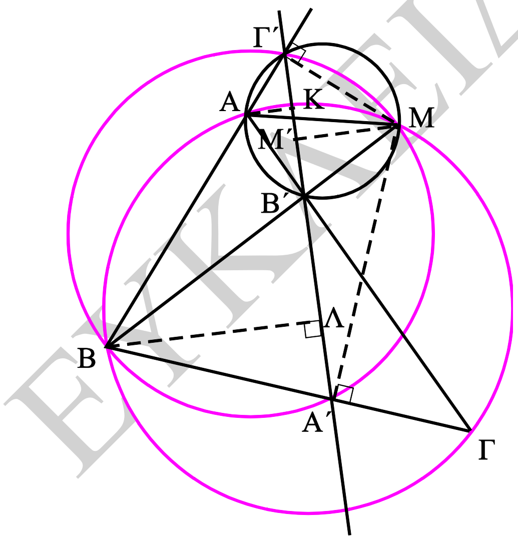


Άσκηση 3

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Μ τυχαίο σημείο της περιγεγραμμένης περιφέρειας του τριγώνου αυτού. Αν Α΄και Β΄οι προβολές του σημείου Μ στις πλευρές ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα να δείξετε ‘ότι η προβολή της πλευράς ΑΒ στην ευθεία Α΄Β΄ισούται με το μήκος Α΄Β΄.

Λύση

Έστω Κ, Λ οι προβολές των σημείων Α, Β στην ευθεία Α΄Β΄. Πρέπει να αποδείξουμε ότι: ΚΛ=Β΄Α΄.



Όπως είδαμε στην άσκηση 1 η ευθεία Α΄Β΄θα τμήσει την ΑΒ στην προβολή του Μ στην ΑΒ έστω Γ΄(ευθεία SIMSON). Άρα $M\Gamma' \perp AB$.

Το τετράπλευρο ΑΓ΄ΜΒ΄είναι εγγράψιμο και η ΑΜ διάμετρός του. Αν Μ΄η προβολή του Μ στην ευθεία Α΄Β΄(έστω ευθεία(ε)) σύμφωνα με την άσκηση 2 θα ισχύει: Γ΄Μ΄=ΚΒ΄(1) (Οι προβολές των ΜΓ΄και ΑΒ΄ στη χορδή Γ΄Β΄)

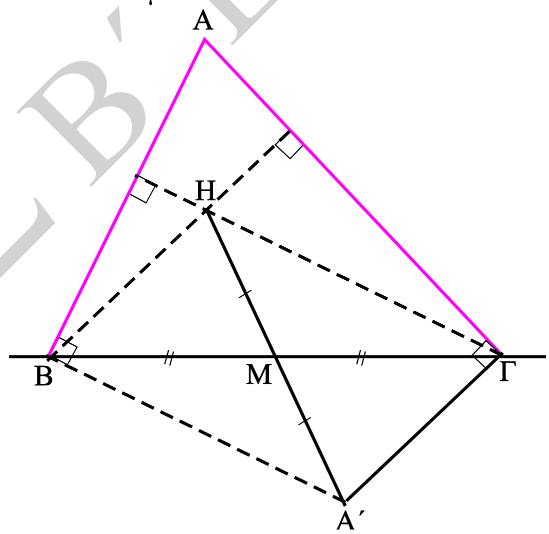
Το τετράπλευρο είναι επίσης εγγράψιμο με τη ΜΒ διάμετρό του. Οπότε οι προβολές των ΒΑ΄και ΜΓ΄στην Α΄Γ΄είναι ίσες σύμφωνα με την άσκηση 2 άρα Γ΄Μ΄=ΛΑ΄(2). Από (1) και (2) προκύπτει ότι ΚΒ΄=ΛΑ΄⇔ΚΒ΄+Β΄Λ=Β΄Λ+ΛΑ΄⇔ΚΛ=Β΄Α΄

Άσκηση 4

Αποδείξτε ότι το συμμετρικό του ορθοκέντρου Η ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς το μέσο της πλευράς ΒΓ, βρίσκεται στην περιγεγραμμένη περιφέρεια του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, Η το ορθόκεντρο, Μ το μέσο της πλευράς ΒΓ και Α΄το συμμετρικό του Η ως προς το Μ. Το τετράπλευρο ΒΗΓΑ΄οι διαγώνιοι διχοτομούνται. Άρα είναι παραλληλόγραμμο. Επομένως ΓΑ΄//ΒΗ Όμως $BH \perp A\Gamma$ (ύψος) Άρα $\Gamma A' \perp A\Gamma$ δηλαδή $A\hat{\Gamma}A' = 90^o$ Όμοια ΒΑ΄//ΓΗ οπότε $A\hat{B}A' = 90^o$.



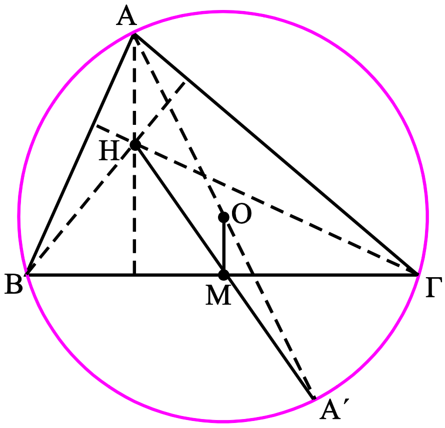
Επομένως το τετράπλευρο ΑΒΑ΄Γ είναι εγγράψιμο δηλ. ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ διέρχεται από το Α΄.

Άσκηση 5

Αποδείξτε ότι το περίκεντρο Ο ενός τριγώνου απέχει από κάθε πλευρά όσο το μισό της απόστασης του ορθόκεντρου από την απέναντι κορυφή της πλευράς αυτής.

Λύση

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ο το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του. Αν $OM \perp B\Gamma$ και Η το ορθόκεντρο τότε θα αποδείξουμε ότι: $OM = \frac{AH}{2}$.



Σύμφωνα με την άσκηση 4 το συμμετρικό του ορθόκεντρου Η ως προς το μέσο Μ της πλευράς ΒΤ, το σημείο Α΄είναι σημείο του περιγεγραμμένου κύκλου και μάλιστα με διάμετρο ΑΑ΄. Άρα η ΑΑ΄διέρχεται από το κέντρο του κύκλου. Στο τρίγωνο ΑΗΑ΄τα Μ και Ο ενώνουν τα μέσα των ΗΑ΄και ΑΑ΄. Άρα θα ισχύει: $OM = \frac{AH}{2}$

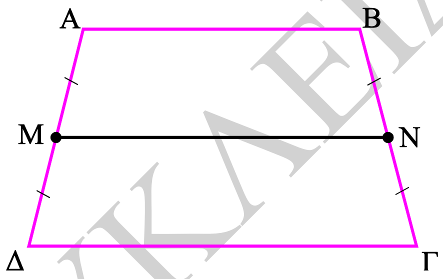
Άσκηση 7

Να δείξετε ότι: «Κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο» Πότε είναι περιγράψιμο;

Απόδειξη.

Έστω ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΣ (ΑΔ=ΒΓ)

Ισχύει $\hat{A} = \hat{B}$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$.



Άρα $\hat{A} + \hat{\Gamma} = \hat{B} + \hat{\Delta}$.

Επομένως το τραπέζιο είναι εγγράψιμο. Αν ΜΝ η διάμεσος του τραπεζίου τότε

ΑΒΓΔ περιγράψιμο⇔

ΑΒ+ΓΔ+=ΑΔ+ΒΓ⇔2ΜΝ=2ΑΔ⇔ΜΝ=ΑΔ.

Άσκηση 10

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το περίκεντρο Ο, το ύψος ΑΔ και έστω τυχαίο σημείο του ύψους ΑΔ. Αν Ρ το μέσο του ΟΜ και Κ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα δείξτε ότι: ΡΝ=ΡΚ

Λύση

Μια οριακή θέση του Μ είναι το ορθόκεντρο Η. Τότε το μέσο της ΟΗ είναι το κέντρο του Κύκλου Euler, οπότε θα ισχύσει: Ο΄Κ=Ο΄Ν. Παρατηρούμε ότι αν ΡΝ=ΡΚ τα σημεία Ρ και Ο΄θα ανήκουν τότε στη μεσοκάθετο του ΚΝ. Επειδή το Ο΄ ανήκει στη μεσοκάθετο του ΝΚ αρκεί να δείξουμε ότι και το Ρ ανήκει σ' αυτήν. Όμως το τμήμα ΡΟ΄ ενώνει τα μέσα των ΟΜ και ΟΗ στο τρίγωνο ΟΜΗ. Άρα ΡΟ΄//ΗΜ. Όμως $HM \perp B\Gamma$ και ΝΚ//ΒΓ. Άρα: $PO' \perp NK$. Άρα η ΡΟ΄ είναι μεσοκάθετος του Ν. Άρα ΡΝ=ΡΚ.