ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ

Κώστα Βακαλόπουλου

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Αν κάποιος θέλει να πάψει να φοβάται το κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας, πρέπει ν' αποφασίσει να διαβάσει προσεκτικά τους ορισμούς των αρχικών εννοιών απ' όποιο βιβλίο κι αν θελήσει.

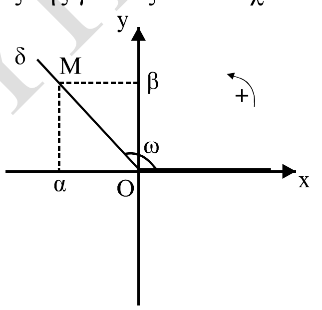
Ειδικά θα πρέπει να συνειδητοποιήσει ότι οι τριγωνομετρικοί αριθμοί (ημίτονο, συνημίτονο, εφαπτομένη και συνεφαπτομένη) μιας γωνίας δεν αφορούν αποκλειστικά οξείες γωνίες αλλά και γωνίες ω με $0° \le \omega \le 360°$*, επίσης γωνίες μεγαλύτερες των 360° αλλά και αρνητικές γωνίες.*

Επομένως:

Οι ορισμοί που έμαθε στην Β΄ Γυμνασίου και αφορούν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας οξείας γωνίας δεν είναι τελικά οι μόνοι που υπάρχουν.

Στην Γ΄ Γυμνασίου αλλά ειδικά στην Α΄ Λυκείου τέθηκαν οι ορισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών μιας γωνίας (γενικά) όχι κατ' ανάγκη οξείας. Σύμφωνα μ' αυτούς, για να οριστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί μιας γωνίας ω πρέπει να τοποθετηθεί «κατάλληλα» σ' ένα σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα 1. Συγκεκριμένα, η γωνία ω ταυτίζεται με τη γωνία που παράγεται από τον ημιάξονα Ox (αρχική πλευρά) όταν στραφεί γύρω από το O κατά την θετική φορά (δηλαδή την αντίθετη των δεικτών του ρολογίου). Η τελική θέση του ημιάξονα Oδ είναι η τελική πλευρά της γωνίας.

Στη συνέχεια, αν M(α,β) τυχαίο σημείο της τελικής πλευράς της γωνίας ω θα ισχύει:



Σχήμα 1

$$(OM) = \rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2} > 0. \quad (1)$$

Ονομάζουμε:

- $\eta\mu\omega = \dfrac{\beta}{\rho}\left(= \dfrac{\text{τεταγμενη του σημειου M}}{\text{αποσταση του M απο το O}}\right)$
- $\sigma\upsilon\nu\omega = \dfrac{\alpha}{\rho}\left(= \dfrac{\text{τετμημενη του σημειου M}}{\text{αποσταση του M απο το O}}\right)$
- $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\beta}{\alpha}\left(= \dfrac{\text{τεταγμενη του σημειου M}}{\text{τετμημενη του σημειου M}}\right)$ με $\alpha \ne 0$
- $\sigma\varphi\omega = \dfrac{\alpha}{\beta}\left(= \dfrac{\text{τετμημενη του σημειου M}}{\text{τεταγμενη του σημειου M}}\right)$ με $\beta \ne 0$.

Προφανώς:

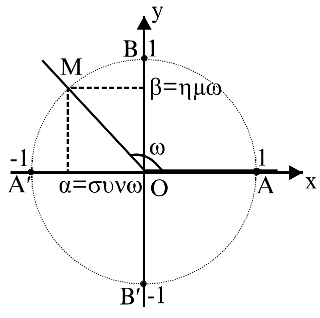
Αν $\sigma\upsilon\nu\omega \ne 0$ τότε $\varepsilon\varphi\omega = \dfrac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ και

αν $\eta\mu\omega \ne 0$ τότε $\sigma\varphi\omega = \dfrac{\sigma\upsilon\nu\omega}{\eta\mu\omega}$.

Επειδή το σημείο M είναι τυχαίο και οι παραπάνω λόγοι είναι σταθεροί δηλαδή ανεξάρτητοι από την επιλογή του σημείου M (αφού λόγω των ομοίων τριγώνων που σχηματίζονται οι λόγοι είναι σταθεροί), λαμβάνουμε ως σημείο M το σημείο που η τελική πλευρά της γωνίας τέμνει τον κύκλο κέντρου O(0,0) και ακτίνας ίση με τη μονάδα μήκους ($\rho = 1$) (ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΣ ΚΥΚΛΟΣ).

– *Κι αυτό, γιατί;*

– *Απλούστατα γιατί πλέον οι προηγούμενοι ορισμοί, απαλλάσσονται από τον παρανομαστή αφού αυτός ισούται με 1.*



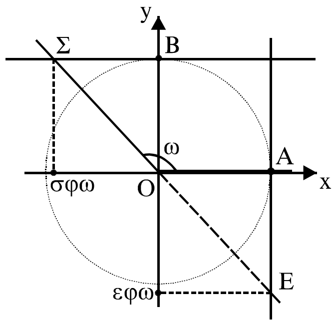
Σχήμα 2

Έτσι για το ημίτονο και το συνημίτονο έχουμε: (σχ. 2)

- $\eta\mu\omega = \beta$ (= τεταγμένη του M)
- $\sigma\upsilon\nu\omega = \alpha$ (= τετμημένη του M)

Εύκολα αποδεικνύεται (βλέπε απόδειξη σχολικού βιβλίου) ότι η εφω είναι ίση με την τεταγμένη του σημείου Ε, σημείο που η τελική πλευρά της γωνίας ή η προέκτασή της τέμνει τον εφαπτόμενο άξονα του κύκλου στο σημείο Α (σχ. 3).

Αντίστοιχα η σφω είναι ίση με την τετμημένη του σημείου Σ, σημείο που η τελική πλευρά της γωνίας ή η προέκτασή της τέμνει τον εφαπτόμενο άξονα του κύκλου στο σημείο Β (σχ. 3).



Σχήμα 3

Επομένως:

Αν Μ, Ε και Σ τα σημεία του τριγωνομετρικού κύκλου όπως αυτά ορίστηκαν πιο πάνω ισχύει:

$ημω = y_M$ (τεταγμένη του Μ)

$συνω = x_M$ (τετμημένη του Μ)

$εφω = y_E$ (τεταγμένη του Ε)

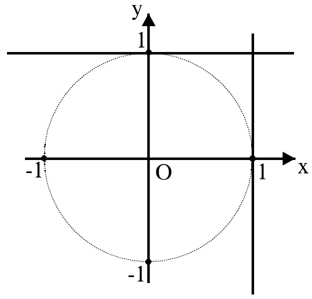
$σφω = x_Σ$ (τετμημένη του Σ)

ΆΣΚΗΣΗ

Ας κάνουμε τώρα μια άσκηση και να εφαρμόσουμε τους παραπάνω ορισμούς:

Βρείτε τα σημεία Μ, Ε και Σ που αντιστοιχούν στις γωνίες 0° (0 rad), 90° ($\frac{\pi}{2}$ rad), 180° (π rad), 270° ($\frac{3\pi}{2}$ rad), 360° (2π rad) και συμπληρώστε τον παρακάτω πίνακα (όπως στη πρώτη στήλη):

$ημ0° = 0$	$ημ90° =;$	$ημ180° =;$	$ημ270° =;$	$ημ360° =;$
$συν0° = 1$	$συν90° =;$	$συν180° =;$	$συν270° =;$	$συν360° =;$
$εφ0° = 0$	$εφ90° =;$	$εφ180° =;$	$εφ270° =;$	$εφ360° =;$
$σφ0° = -$	$σφ90° =;$	$σφ180° =;$	$σφ270° =;$	$σφ360° =;$



(Απ.: 1, 0, –, 0 / 0, –1, 0, – / –1, 0, –, 0 / 0, 1, 0, –)

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. *Με τη βοήθεια του Τριγωνομετρικού κύκλου εύκολα καταλαβαίνουμε γιατί ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις:*

- Για κάθε γωνία ω ισχύει: $\boxed{-1 \le ημω \le 1}$ και $\boxed{-1 \le συνω \le 1}$, αφού οι τεταγμένες και οι τετμημένες του σημείου Μ όλων των γωνιών στον τριγωνομετρικό κύκλο βρίσκονται μεταξύ των αριθμών –1 και 1 (σχ. 2).
- Για κάθε γωνία ω και για κάθε κ∈ℤ ισχύει: $\boxed{ημ(κ \cdot 360° + ω) = ημω}$

(ή $\boxed{ημ(κ \cdot 2π + ω) = ημω}$),αφού οι τελικές πλευρές των γωνιών: $κ \cdot 360° + ω$, (ή $κ \cdot 2π + ω$), $κ \in \mathbb{Z}$ ταυτίζονται με την τελική πλευρά της γωνίας ω (ομοίως για τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ:

$$ημ\frac{133π}{6} = ημ\frac{133 \cdot 2π}{12} = ημ\left[\left(11 + \frac{1}{12}\right)2π\right] =$$

$$ημ\left(11 \cdot 2π + \frac{2π}{12}\right) = ημ\left(11 \cdot 2π + \frac{π}{6}\right) = ημ\frac{π}{6} = \boxed{\frac{1}{2}}.$$

2. *Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου μπορούμε να αναγάγουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς μιας γωνίας σε τριγωνομετρικούς αριθμούς γωνίας που η τελική της πλευρά βρίσκεται στο 1^ο τεταρτημόριο (χωρίς να χρειάζεται να απομνημονεύσουμε τους αντίστοιχους τύπους!).*

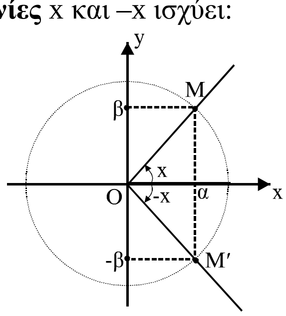
Για τις **αντίθετες γωνίες** x και –x ισχύει:

$ημ(-x) = -ημx$

$συν(-x) = συνx$

$εφ(-x) = -εφx$

$σφ(-x) = -σφx$



Επεξήγηση

Οι γωνίες x και –x τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία Μ και Μ΄ αντίστοιχα, που είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα x΄x και έχουν ίσες τετμημένες και αντίθετες τεταγμένες, δηλ. ίσα συνημίτονα και αντίθετα ημίτονα. Προφανώς θα έχουν αντίθετες εφαπτομένες και συνεφαπτομένες.

ΑΣΚΗΣΗ

Επαληθεύοντας τις μέχρι τώρα γνώσεις σας και με πολύ προσοχή συμπληρώστε τα κενά στους παρακάτω πίνακες εκφράζοντας τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των γωνιών: $\pi - x$, $\pi + x$, $\frac{\pi}{2} - x$ *συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας x*

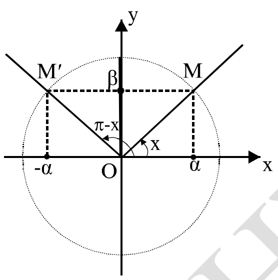
i) $\pi - x$, x **(παραπληρωματικές γωνίες)**

$\eta\mu(\pi - x) = ;$

$\sigma\upsilon\nu(\pi - x) = ;$

$\varepsilon\varphi(\pi - x) = ;$

$\sigma\varphi(\pi - x) = ;$



Προσοχή

Τα σημεία Μ και Μ΄ είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y, άρα έχουν αντίθετες τετμημένες και ίσες τεταγμένες δηλ. ....

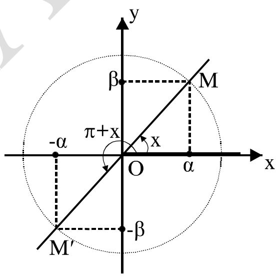
ii) $\pi + x$, x **(γωνίες με διαφορά π)**

$\eta\mu(\pi + x) = ;$

$\sigma\upsilon\nu(\pi + x) = ;$

$\varepsilon\varphi(\pi + x) = ;$

$\sigma\varphi(\pi + x) = ;$



Προσοχή

Τα σημεία Μ και Μ΄ είναι συμμετρικά ως προς την αρχή Ο(0,0) των αξόνων, άρα έχουν αντίθετες τετμημένες και αντίθετες τεταγμένες δηλ. ....

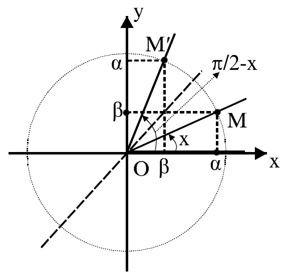
iii) $\frac{\pi}{2} - x$, x **(συμπληρωματικές γωνίες)**

$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = ;$

$\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = ;$

$\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = ;$

$\sigma\varphi\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = ;$



Προσοχή

Τα σημεία Μ και Μ΄ είναι συμμετρικά ως προς την διχοτόμο της γωνία xOy, άρα το Μ΄ έχει τετμημένη την τεταγμένη του Μ και τεταγμένη την τετμημένη του Μ δηλ. ....

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ (ΣΤΗΝ ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2)

1) Κατ' αρχήν οι απαντήσεις στη παραπάνω άσκηση: i) ημx, –συνx, –εφx, –σφx, ii) –ημx, –συνx, εφx, σφx, iii) συνx, ημx, σφx, εφx.

2) Οι παραπάνω τύποι περιέχονται στο σχολικό βιβλίο με την μορφή: $\eta\mu(180° - \omega) = \ldots$ για την περίπτωση (i), $\eta\mu(180° + \omega) = \ldots$ για την περίπτωση (ii) και $\eta\mu(90° - \omega) = \ldots$ για την περίπτωση (iii).

3) Οι παραπάνω τύποι: αναγωγής στο 1^o τεταρτημόριο ισχύουν και για οποιαδήποτε γωνία x.

4) Για τις γωνίες $\frac{\pi}{2} + x$, $\frac{3\pi}{2} - x$, x και για τις γωνίες $\frac{3\pi}{2} + x$, x εργαζόμαστε όπως στο παράδειγμα που ακολουθεί:

- $$\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \eta\mu\left[\frac{\pi}{2} - (-x)\right] \overset{(iii)}{=} \sigma\upsilon\nu(-x) = \sigma\upsilon\nu x$$
- $$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \eta\mu\left[\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] \overset{(ii)}{=} -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \overset{(iii)}{=} -\sigma\upsilon\nu x$$
- $$\eta\mu\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \eta\mu\left[2\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] \overset{(*)}{=} \eta\mu\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] \overset{(i)}{=} -\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sigma\upsilon\nu x$$

(*) θυμίζουμε ότι: $\eta\mu(\kappa \cdot 2\pi + x) = \eta\mu x$, $\kappa \in \mathbb{Z}$.

5) Γενικά ισχύει:

i) Γωνίας, που η τελική της πλευρά βρίσκεται στο $2^{ο}$ τεταρτημόριο, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί υπολογίζονται συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας που υπολείπεται των 180° (ή π rad).

π.χ. $συν120° = συν(180° - 60°) = -συν60° = -\frac{1}{2}$.

ii) Γωνίας, που η τελική της πλευρά βρίσκεται στο $3^{ο}$ τεταρτημόριο, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί υπολογίζονται συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας που υπερβαίνει των 180° (ή π rad).

π.χ. $εφ\frac{7π}{6} = εφ\left(π + \frac{π}{6}\right) = εφ\frac{π}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

iii) Γωνίας, που η τελική της πλευρά βρίσκεται στο $4^{ο}$ τεταρτημόριο, οι τριγωνομετρικοί αριθμοί υπολογίζονται συναρτήσει των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας που υπολείπεται των 360° (ή 2π rad).

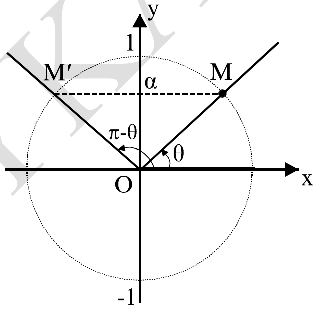
π.χ. $σφ\frac{5π}{3} = σφ\left(2π - \frac{π}{3}\right) = -σφ\frac{π}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. *Με τη βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου μπορούμε να λύσουμε τριγωνομετρικές εξισώσεις και ανισώσεις.*

Ισχύει:

$$\boxed{ημx = α \overset{-1 \le α \le 1}{\Leftrightarrow} ημx = ημθ \Leftrightarrow \begin{cases} x = κ \cdot 2π + θ \\ ή \\ x = κ \cdot 2π + π - θ \end{cases}, κ \in \mathbb{Z}}$$

(όπου θ, γωνία που έχει ημίτονο α).



Εξήγηση: Οι γωνίες x (σε rad) που έχουν ημίτονο α, δηλ. όσο το ημθ είναι οι γωνίες που οι τελικές τους πλευρές τέμνουν τον κύκλο

- στο M οπότε: $x = κ \cdot 2π + θ$, $κ \in \mathbb{Z}$ ή
- στο M΄ οπότε: $x = κ \cdot 2π + (π - θ)$, $κ \in \mathbb{Z}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

α) Να λυθεί η εξίσωση: $ημx = \frac{1}{2}$ (1)

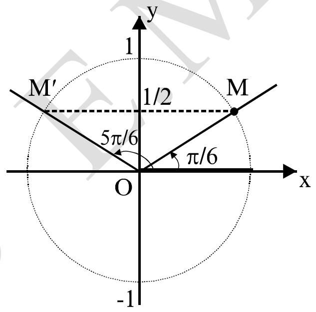
β) Να λυθεί η ανίσωση: $ημx \ge \frac{1}{2}$ (2)

Λύση

α) $ημx = \frac{1}{2} \overset{\frac{1}{2} = ημ\frac{π}{6}}{\Leftrightarrow} ημx = ημ\frac{π}{6} \Leftrightarrow x = κ \cdot 2π + \frac{π}{6}$

ή $x = κ \cdot 2π + \left(π - \frac{π}{6}\right) \Leftrightarrow x = κ \cdot 2π + \frac{π}{6}$ ή

$x = κ \cdot 2π + \frac{5π}{6}$, $κ \in \mathbb{Z}$.



β) $ημx \ge \frac{1}{2}$

Σύμφωνα με τον τριγωνομετρικό κύκλο του σχήματος, λύσεις της ανίσωσης (2) είναι οι γωνίες των οποίων οι τελικές πλευρές τέμνουν τον κύκλο σε σημεία του ελάσσονος τόξου MM' δηλ. οι γωνίες $\frac{π}{6} \le x \le \frac{5π}{6}$ και γενικότερα:

$κ \cdot 2π + \frac{π}{6} \le x \le κ \cdot 2π + \frac{5π}{6}$, $κ \in \mathbb{Z}$.

ΑΡΑ:

Λύσεις της παραπάνω ανίσωσης είναι οι πραγματικοί αριθμοί x που ανήκουν στην ένωση των διαστημάτων της μορφής:

$$\left[κ \cdot 2π + \frac{π}{6}, κ \cdot 2π + \frac{5π}{6}\right],\ κ \in \mathbb{Z}.$$

ΑΣΚΗΣΗ

Μελετώντας προσεκτικά τον τριγωνομετρικό κύκλο να συμπληρώσετε τις λύσεις των παρακάτω εξισώσεων:

- $συνx = α \overset{-1 \le α \le 1}{\Leftrightarrow} συνx = συνθ \Leftrightarrow \begin{cases} x = ; \\ ή \\ x = ; \end{cases}$

(θ: γωνία με συνημίτονο α)

- $\varepsilon\varphi x = \alpha \overset{\alpha\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi\theta \Leftrightarrow x = ;$

  (θ: γωνία με εφαπτομένη α)
- $\sigma\varphi x = \alpha \overset{\alpha\in\mathbb{R}}{\Leftrightarrow} \sigma\varphi x = \sigma\varphi\theta \Leftrightarrow x = ;$

  (θ: γωνία με συνεφαπτομένη α)

(Απ.: $x = \kappa\cdot 2\pi + \theta$ ή $x = \kappa\cdot 2\pi - \theta$ / $x = \kappa\pi + \theta$ / $x = \kappa\pi + \theta,\ \kappa\in\mathbb{Z}$)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

1) Να αποδειχθεί η ισοδυναμία:
$|\varepsilon\varphi x\cdot\varepsilon\varphi y| < 1 \Leftrightarrow |\eta\mu y| < |\sigma\upsilon\nu x|$.

2) Αν α,β∈ℝ δείξτε ότι:
(i) $|4\cdot\eta\mu\alpha + 11\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha| \le 15$,
(ii) (ii) $|4\alpha\eta\mu x - 5\beta\sigma\upsilon\nu x| \le 4|\alpha| + 5|\beta|$.

3) Να επιλύσετε (ως προς x) τις εξισώσεις:
(i) $x^2 - (\eta\mu\alpha + \sigma\upsilon\nu\alpha)x + \eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha = 0$.
(ii) $x^2 - 2x + \eta\mu^2\alpha = 0$.
(iii) $x^2 - \dfrac{x}{\eta\mu\alpha\cdot\sigma\upsilon\nu\alpha} + 1 = 0$.

4) Να υπολογιστεί η τιμή των παραστάσεων:

$$A = \frac{\eta\mu(1170^\circ) + \sigma\upsilon\nu 1170^\circ + 2}{\varepsilon\varphi 1080^\circ - 3\cdot\sigma\upsilon\nu 1080^\circ}$$

$$B = \frac{\eta\mu\dfrac{17\pi}{2} - \varepsilon\varphi\pi}{\sigma\upsilon\nu\dfrac{17\pi}{2} + \varepsilon\varphi(-\pi) + 1}$$

5) i) Ν' απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = \frac{\eta\mu(\pi + x)\cdot\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{3\pi}{2} - x\right)\cdot\varepsilon\varphi\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)}{\eta\mu(2\pi - x)}.$$

ii) Ν' αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu^2\left(-\dfrac{7\pi}{2}\right) + \sigma\upsilon\nu(7\pi + x)\cdot\eta\mu\left(-\dfrac{3\pi}{2} - x\right)}{\sigma\upsilon\nu^2 9\pi + \eta\mu\left(-\dfrac{13\pi}{2} - x\right)} = 1 + \sigma\upsilon\nu x.$$

6) Να υπολογιστούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = \eta\mu^2 36^\circ + \eta\mu^2 54^\circ + \eta\mu^2 18^\circ + \eta\mu^2 72^\circ$$

$$B = \left(\eta\mu\frac{\pi}{5}\cdot\eta\mu\frac{2\pi}{5}\right) : \left(\eta\mu\frac{3\pi}{5}\cdot\eta\mu\frac{4\pi}{5}\right)$$

7) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{3\varepsilon\varphi\left(x - \dfrac{\pi}{2}\right) + \varepsilon\varphi(-x - \pi)}{2\varepsilon\varphi(\pi - x) + 6} = \frac{1}{2}.$$