Β΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΕΥΘΕΙΑ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΣ (εχθροί ή φίλοι;)

Του Κώστα Βακαλόπουλου

*Στο άρθρο που ακολουθεί παραθέτουμε μια σειρά από ασκήσεις στις οποίες συνυπάρχουν άλλοτε **αρμονικά** και άλλοτε **ανταγωνιστικά** οι δύο βασικές γραμμές της ευθείας και του κύκλου. Σας καλούμε να παρακολουθήσετε τον αγώνα τους και στο τέλος να δώσετε το **έπαθλο στη γραμμή** που νομίζετε ότι κέρδισε στα σημεία!*

ΑΣΚΗΣΗ 1

Θεωρούμε τα σημεία $M(2\lambda-1, 3-\lambda), \lambda\in\mathbb{R}$.

Α) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος (c) των σημείων Μ.

Β) Να βρεθεί το σημείο Α του (c) που απέχει από την αρχή των αξόνων Ο την ελάχιστη απόσταση καθώς και η ελάχιστη αυτή απόσταση.

Γ) Αν Β το σημείο που τέμνει ο (c) τον άξονα x΄x να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΟΑΒ.

Δ) Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Ν του επιπέδου για τα οποία το εμβαδόν του τριγώνου ΝΑΒ ισούται με 20.

ΛΥΣΗ

Α) Έστω Μ τυχαίο σημείο του ζητούμενου γ.τ. Τότε $x_M = 2\lambda-1$ (1) και $y_M = 3-\lambda$ (2) για κάποιο $\lambda\in\mathbb{R}$.

Έχουμε: $(2)\Rightarrow \lambda = 3-y_M$.

Οπότε: $(1)\Rightarrow x_M+2y_M-5=0$ (I) $\Rightarrow M\in(\varepsilon)$, όπου (ε) η ευθεία με εξίσωση: $\boxed{x+2y-5=0}$.

Αντίστροφα,
Έστω $M(x_M, y_M)\in(\varepsilon)$.

Τότε προφανώς υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $x_M = 2\lambda-1$

Πρόκειται για το $\lambda = \dfrac{x_M+1}{2}$.

Τότε: $M\in(\varepsilon)\Rightarrow(2\lambda-1)+2y_M-5=0\Rightarrow$
$y_M = 3-\lambda$.

Άρα το Μ θα έχει συντεταγμένες της μορφής $(2\lambda-1, 3-\lambda)$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Σε μια άσκηση που ζητείται ο γ.τ. των σημείων Μ που πληρούν μια ιδιότητα Ι, αφού ανακαλύψουμε τη γραμμή (c) πάνω στην οποία κινείται το σημείο Μ πρέπει, αντίστροφα, να ελέγξουμε αν κάθε σημείο της γραμμής (c) έχει την ιδιότητα Ι.

Πολλές φορές κατά το στάδιο της λύσης μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ισοδυναμίες, οπότε έχουμε συγχρόνως το ευθύ και το αντίστροφο.

Έτσι το παραπάνω ερώτημα θα μπορούσε να αντιμετωπισθεί ως εξής: Έστω $M(x_0, y_0)$ σημείο του επιπέδου και (c) ο γ.τ. Τότε $M\in(c)\Leftrightarrow$ Υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $x_0 = 2\lambda-1$ και $y_0 = 3-\lambda$ $\Leftrightarrow$ Υπάρχει $\lambda\in\mathbb{R}$ ώστε $\lambda = \dfrac{x_0+1}{2}$ και $\lambda = 3-y_0 \Leftrightarrow \dfrac{x_0+1}{2} = 3-y_0 \Leftrightarrow x_0+2y_0-5=0$.

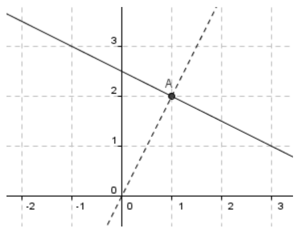
Άρα ο γ.τ. είναι η ευθεία (ε): $x+2y-5=0$.

Β) Το σημείο της ευθείας που έχει τη μικρότερη απόσταση από την αρχή των αξόνων είναι το σημείο τομής της ευθείας (ε) με τη κάθετη ευθεία (η) από το Ο στην (ε). Η ευθεία (η) έχει εξίσωση:

$y = 2x$ αφού: $\varepsilon\perp\eta\Rightarrow\lambda_\varepsilon\cdot\lambda_\eta = -1\Rightarrow\lambda_\eta = \dfrac{-1}{-1/2} = 2$.

Λύνοντας το σύστημα:

$$\begin{cases} y = 2x \\ x+2y-5=0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$$



βρίσκουμε ότι το ζητούμενο σημείο είναι το $A(1,2)$.

Η απόσταση του $O(0,0)$ από την ευθεία (ε) είναι:

$$d = \frac{|0+2\cdot0-5|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}.$$

Γ) Αντικαθιστώντας $y=0$ στην εξίσωση της ευθείας (ε) έχουμε $x=5$. Άρα είναι: $B(5,0)$.

Επίσης $\overrightarrow{OA} = (1,2)$, $\overrightarrow{OB} = (5,0)$ και

$\det\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)=\begin{vmatrix}1 & 2\\ 5 & 0\end{vmatrix}=-10$.

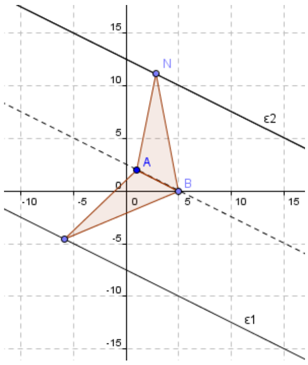
Άρα: $(OAB)=\frac{1}{2}\cdot|-10|=5$.

Δ) Έστω $N(x_0,y_0)$ τυχαίο σημείο του επιπέδου. Τότε έχουμε: $\overrightarrow{AN}=(x_0-1,y_0-2)$, $\overrightarrow{AB}=(4,-2)$ και $\det\left(\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AB}\right)=\begin{vmatrix}x_0-1 & y_0-2\\ 4 & -2\end{vmatrix}=$

$\ldots=-2(x_0+2y_0-5)$. Αν (c) ο ζητούμενος γ.τ., τότε: $N\in(c)\Leftrightarrow(ABN)=20\Leftrightarrow$

$\frac{1}{2}\cdot|-2(x_0+2y_0-5)|=20\Leftrightarrow|x_0+2y_0-5|=20$

$\ldots\Leftrightarrow x_0+2y_0-25=0$ ή $x_0+2y_0+15=0$.



΄Αρα ο γ.τ. είναι η ένωση των ευθειών:

$(\varepsilon_1): x+2y-25=0$

και

$(\varepsilon_2): x+2y+15=0$.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Θωρούμε τα σημεία:

$$\mathbf{M\left(\sqrt{2}\cdot\eta\mu\theta-2,\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+2\right),\ \theta\in\mathbb{R}}.$$

Α) Να βρεθεί ο γ.τ. (c) των σημείων Μ .

Β) Αν $x+y=\mu$, $\mu\in\mathbb{R}$ (1) παραμετρική οικογένεια ευθειών του επιπέδου να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$ οι ευθείες που παριστάνει η εξίσωση (1)

i) τέμνουν τον (c)

ii) εφάπτονται στον (c)

iii) είναι εξωτερικές του (c).

Λύση

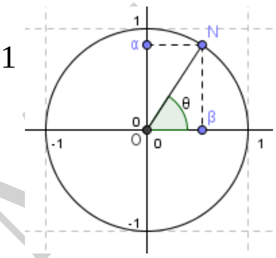
Α) Έστω $M(x_M,y_M)$ τυχαίο σημείο του ζητούμενου γ.τ. Τότε $x_M=\sqrt{2}\cdot\eta\mu\theta-2$ (1) και $y_M=\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+2$ (2).

$(1)\Rightarrow\eta\mu\theta=\frac{x_M+2}{\sqrt{2}}$ και $(2)\Rightarrow\sigma\upsilon\nu\theta=\frac{y_M-2}{\sqrt{2}}$, (Ιδιότητα Ι). Όμως για κάθε $\theta\in\mathbb{R}$ ισχύει: $\eta\mu^2\theta+\sigma\upsilon\nu^2\theta=1$. Άρα: $\left(\frac{x_M+2}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y_M-2}{\sqrt{2}}\right)^2=1\Rightarrow$

$(x_M+2)^2+(y_M-2)^2=2\Rightarrow M\in(c)$, όπου (c) ο κύκλος με εξίσωση: $(x+2)^2+(y-2)^2=2$.

Αντίστροφα: Έστω Μ σημείο του κύκλου (c), τότε: $(x_M+2)^2+(y_M-2)^2=2\Rightarrow$

$\left(\frac{x_M+2}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{y_M-2}{\sqrt{2}}\right)^2=1$



Έστω $\alpha=\frac{x_M+2}{\sqrt{2}}$ και $\beta=\frac{y_M-2}{\sqrt{2}}$. Επειδή $\alpha^2+\beta^2=1$ το σημείο $N(\beta,\alpha)$ απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση ίση με 1. Άρα είναι σημείο του τριγωνομετρικού κύκλου. Έστω θ μια από τις γωνίες με τελική πλευρά την ημιευθεία ΟΝ. Σύμφωνα με τον ορισμό των τριγωνομετρικών αριθμών ισχύει:

$\left.\begin{matrix}\beta=\sigma\upsilon\nu\theta\\ \alpha=\eta\mu\theta\end{matrix}\right\}\Rightarrow\frac{y_M-2}{\sqrt{2}}=\sigma\upsilon\nu\theta,\ \frac{x_M+2}{\sqrt{2}}=\eta\mu\theta\Rightarrow$

$\left.\begin{matrix}y_M=\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+2\\ x_M=\sqrt{2}\cdot\eta\mu\theta-2\end{matrix}\right\}$. Άρα για κάθε σημείο Μ του παραπάνω κύκλου υπάρχει $\theta\in\mathbb{R}$ ώστε να έχει συντεταγμένες, τις: $\left(\sqrt{2}\cdot\eta\mu\theta-2,\sqrt{2}\cdot\sigma\upsilon\nu\theta+2\right)$.

Επομένως ο γ.τ. των σημείων Μ είναι ο κύκλος (c) με κέντρο $K(-2,2)$ και ακτίνα $\rho=\sqrt{2}$.

Β) Γεωμετρική λύση:

Ως γνωστόν η σχετική θέση ευθείας ε και κύκλου (K,ρ) εξαρτάται από τη σχέση της απόστασης του κέντρου του κύκλου από την ευθεία με την ακτίνα του κύκλου. Συγκεκριμένα.

- Αν $d(K,\varepsilon)<\rho$ η ευθεία τέμνει τον κύκλο, δηλαδή έχει με αυτόν δύο κοινά σημεία
- Αν $d(K,\varepsilon)=\rho$ η ευθεία εφάπτεται του κύκλου, δηλαδή έχει με αυτόν ένα κοινό σημείο.
- Αν $d(K,\varepsilon)>\rho$ η ευθεία είναι εξωτερική του κύκλου, δηλαδή δεν έχει με αυτόν κοινά σημεία.

Η εξίσωση της ευθείας είναι: $x+y-\mu=0$

$$d(K,\varepsilon)=\frac{|-2+2-\mu|}{\sqrt{2}}=\frac{|\mu|}{\sqrt{2}}$$

i) $\frac{|\mu|}{\sqrt{2}}<\sqrt{2}\Leftrightarrow|\mu|<2\Leftrightarrow-2<\mu<2$

Επομένως αν $-2<\mu<2$ τότε η ευθείες που παριστάνει η (1) τέμνουν τον κύκλο.

ii) $\frac{|\mu|}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}\Leftrightarrow|\mu|=2\Leftrightarrow\mu=\pm2$ Επομένως αν $\mu=\pm2$ τότε η ευθείες που παριστάνει η (1) εφάπτονται του κύκλου.

iii) $\frac{|\mu|}{\sqrt{2}}>\sqrt{2}\Leftrightarrow|\mu|<2\Leftrightarrow\mu<-2$ ή $\mu>2$

Επομένως αν $\mu<-2$ ή $\mu>2$ τότε η ευθείες που παριστάνει η (1) είναι εξωτερικές του κύκλου.

Αλγεβρική λύση:

Τα σημεία τομής των ευθειών που παριστάνει η (1) με τον κύκλο (c) έχουν συντεταγμένες τις λύσεις του συστήματος: $\begin{cases}(x+2)^2+(y-2)^2=2\\ x+y-\mu=0\end{cases}\Leftrightarrow$

$$\begin{cases}x^2+y^2+4x-4y+6=0 & (2)\\ y=\mu-x & (3)\end{cases}$$

Η εξίσωση (2) λόγω της (3) γίνεται:

$x^2+(\mu-x)^2+4x-4(\mu-x)+6=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow$

$2x^2-2(\mu-4)x+\mu^2-4\mu+6=0$ (4).

Έστω Δ η διακρίνουσα της εξίσωσης (4).

- Αν $\Delta>0$ τότε η εξίσωση (4) έχει δύο ρίζες οπότε οι ευθείες τέμνουν τον κύκλο.
- Αν $\Delta=0$ τότε η εξίσωση (4) έχει μια διπλή ρίζα οπότε οι ευθείες εφάπτονται του κύκλου.
- Αν $\Delta<0$ τότε η εξίσωση (4) δεν έχει ρίζες (πραγματικές) οπότε οι ευθείες είναι εξωτερικές του κύκλου.

$$\Delta=4(\mu-4)^2-8(\mu^2-4\mu+6)=\ldots=-4(\mu^2-4)$$

i) $-4(\mu^2-4)>0\Leftrightarrow-2<\mu<2$ Επομένως αν $-2<\mu<2$ τότε η ευθείες που παριστάνει η (1) τέμνουν τον κύκλο.

ii) $-4(\mu^2-4)=0\Leftrightarrow\mu=\pm2$. Επομένως αν $\mu=\pm2$ τότε η ευθείες που παριστάνει η (1) εφάπτονται του κύκλου τον κύκλο.

iii) $-4(\mu^2-4)<0\Leftrightarrow\mu<-2$ ή $\mu>2$. Επομένως αν $\mu<-2$ ή $\mu>2$ τότε η ευθείες που παριστάνει η (1) είναι εξωτερικές του κύκλου.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Δίνονται οι εξισώσεις: $(\lambda+2)x+\lambda y-1=0$, $(\lambda+5)x+2y-2=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$.

Α) Να δείξετε ότι οι παραπάνω εξισώσεις παριστάνουν ευθείες.

Β) Να βρείτε τη σχετική θέση των ευθειών $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ για κάθε πραγματική τιμή του λ

Γ) Για ποιες τιμές του λ οι παραπάνω ευθείες είναι κάθετες.

Δ) Για ποιες τιμές του λ οι παραπάνω ευθείες είναι παράλληλες. Για τη μικρότερη από τις τιμές αυτές να βρείτε την εξίσωση της μεσοπαράλληλης αυτών

Ε) Να βρεθεί η ευθεία (ε΄) που τέμνει τις ευθείες $(\varepsilon_1),(\varepsilon_2)$ που προκύπτουν για $\lambda=-1$ στα σημεία Α και Β έτσι ώστε το σημείο $M(4,-2)$ να είναι μέσο του ΑΒ.

Λύση

Α) Προφανώς $(\lambda+2,\lambda)\neq(0,0)$ και $(\lambda+5,2)\neq(0,0)$, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Άρα και οι δύο εξισώσεις παριστάνουν ευθείες

Β) Προφανώς $(\varepsilon_1)//\vec{v}=(\lambda,-\lambda-2)$ και $(\varepsilon_2)//\vec{u}=(2,-\lambda-5)$ και $\vec{v},\vec{u}\neq\vec{0}$

Έχουμε: $\det(\vec{v},\vec{u})=\begin{vmatrix}\lambda & -\lambda-2\\ 2 & -\lambda-5\end{vmatrix}=-\lambda^2-3\lambda+4=$

$=(1-\lambda)(\lambda+4)$, οπότε: $\det(\vec{v},\vec{u})=0\Leftrightarrow\lambda=1$ ή $\lambda=-4$.

- Αν $\lambda\neq1$ και $\lambda\neq-4$ τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ δεν είναι παράλληλα. Άρα και οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνονται.
- Αν $\lambda=1$ τότε οι ευθείες είναι $(\varepsilon_1):3x+y-1=0$ και $(\varepsilon_2):6x+3y-2=0$, δηλαδή $(\varepsilon_2):3x+y-1=0$, οπότε ταυτίζονται.
- Αν $\lambda=-4$ τότε οι ευθείες είναι: $(\varepsilon_1):-2x-4y=1$, δηλαδή $(\varepsilon_1):y=-\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}$ και $(\varepsilon_2):y=-\frac{1}{2}x+1$, οπότε είναι παράλληλες με την Ευκλείδεια έννοια, αφού έχουν τον ίδιο συντελεστή διεύθυνσης και τέμνουν τον άξονα y΄y στα διαφορετικά σημεία $\left(0,-\frac{1}{4}\right)$ και $(0,1)$.

Σημείωση:
Η διερεύνηση της σχετικής θέσης των δύο ευθειών μπορεί να γίνει αν θεωρήσουμε το σύστημα: $\begin{cases}(\lambda+2)x+\lambda y=1\\(\lambda+5)x+2y=2\end{cases}$ και το διερευνήσουμε με τη μέθοδο των οριζουσών.

Οι ορίζουσες του παραπάνω συστήματος είναι: $D=-\lambda^2-3\lambda+4=-(\lambda-1)(\lambda+4)$,
$D_x=-2(\lambda-1)$, $D_y=\lambda-1$. Οπότε:

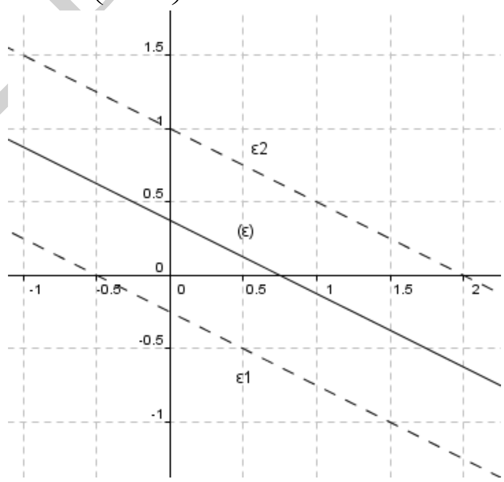
- Αν $\lambda\neq1$ και $\lambda\neq-4$ το σύστημα έχει **μοναδική λύση** την:
$$(x,y)=\left(\frac{D_x}{D},\frac{D_y}{D}\right)=\left(\frac{2}{\lambda+4},-\frac{1}{\lambda+4}\right)$$
οπότε οι ευθείες **τέμνονται** και μάλιστα στο σημείο με συντεταγμένες τη παραπάνω μοναδική λύση του συστήματος.
- Αν $\lambda=1$ το σύστημα γίνεται: $\begin{cases}3x+y=1\\6x+2y=2\end{cases}$
δηλαδή: $\begin{cases}3x+y=1\\3x+y=1\end{cases}$ που προφανώς έχει **άπειρες λύσεις** κάθε ζεύγος: $(x,y)=(x,1-3x),x\in\mathbb{R}$ οπότε οι ευθείες **ταυτίζονται.**
- Αν $\lambda=-4$ το σύστημα γίνεται:
$\begin{cases}-2x-4y=1\\x+2y=2\end{cases}$, δηλαδή: $\begin{cases}x+2y=-\dfrac{1}{2}\\x+2y=2\end{cases}$ που
προφανώς είναι **αδύνατο** οπότε οι ευθείες είναι **παράλληλες** με την Ευκλείδεια έννοια.

Γ) Στο ερώτημα αυτό, θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ του ερωτήματος Α) που είναι παράλληλα στις ευθείες ε_1 και ε_2. Η αναφορά στα διανύσματα αυτά γίνεται γιατί η συνθήκη καθετότητας δύο διανυσμάτων μέσω του εσωτερικού γινομένου τους δεν απαιτεί κανένα περιορισμό. Αντιθέτως η συνθήκη καθετότητας μέσω συντελεστών διεύθυνσης απαιτεί διερεύνηση για τη περίπτωση που τα διανύσματα είναι παράλληλα στον άξονα y΄y. Έχουμε προφανώς $\vec{v},\vec{u}\neq\vec{0}$, οπότε: $(\varepsilon_1)\perp(\varepsilon_2)\Leftrightarrow\vec{v}\perp\vec{u}\Leftrightarrow\vec{v}\cdot\vec{u}=0\Leftrightarrow$
$$(\lambda,-\lambda-2)\cdot(2,-\lambda-5)=0\Leftrightarrow$$
$$2\lambda+(-\lambda-2)(-\lambda-5)=0\Leftrightarrow\lambda^2+9\lambda+10=0$$
$$\Leftrightarrow\lambda=\frac{-9\pm\sqrt{41}}{2}.$$

Δ) Ομοίως $(\varepsilon_1)//(\varepsilon_2)\Leftrightarrow\vec{v}//\vec{u}\Leftrightarrow\det(\vec{v},\vec{u})=0\Leftrightarrow$ $\lambda=1$ ή $\lambda=-4$. Για $\lambda=-4$ έχουμε τις ευθείες $(\varepsilon_1):x+2y+\frac{1}{2}=0$, $(\varepsilon_2):x+2y-2=0$.

Η μεσσοπαράλληλη ευθεία των (ε_1) και (ε_2) θα έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=-\frac{1}{2}$ και θα διέρχεται από το μέσο οποιουδήποτε τμήματος που έχει άκρα στις ευθείες (ε_1) και (ε_2). Οι παραπάνω ευθείες (ε_1) και (ε_2) τέμνουν τον άξονα x΄x στα σημεία $A\left(-\frac{1}{2},0\right)$ και $B(2,0)$ αντίστοιχα.

Οπότε το μέσο Μ του τμήματος ΑΒ είναι ασφαλώς ένα σημείο από το οποίο θα διέλθει η μεσοπαράλληλη που αναζητούμε. ‘Όμως $M\left(\frac{3}{4},0\right)$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι:
$y-0=-\frac{1}{2}\left(x-\frac{3}{4}\right)$, δηλαδή: $4x+8y-3=0$.



ΓΕΝΙΚΑ
Αν ε_1 και ε_2 δυο παράλληλες ευθείες με εξισώσεις: $(\varepsilon_1):\alpha x+\beta y+\gamma_1=0$ και $(\varepsilon_2):\alpha x+\beta y+\gamma_2=0$. Εύκολα αποδεικνύεται ότι η εξίσωση της μεσοπαράλληλης ε των δυο ευθειών είναι: $(\varepsilon):\alpha x+\beta y+\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}=0$

Δ) Για $\lambda=-1$ προκύπτουν οι ευθείες $(\varepsilon_1):x-y-1=0$ και $(\varepsilon_2):2x+y-1=0$.
Έστω Α και Β τα σημεία στα οποία η ευθεία ε΄ τέμνει τις (ε_1) και (ε_2). Αν x_A,x_B οι τετμημένες και y_A,y_B οι τεταγμένες των σημείων

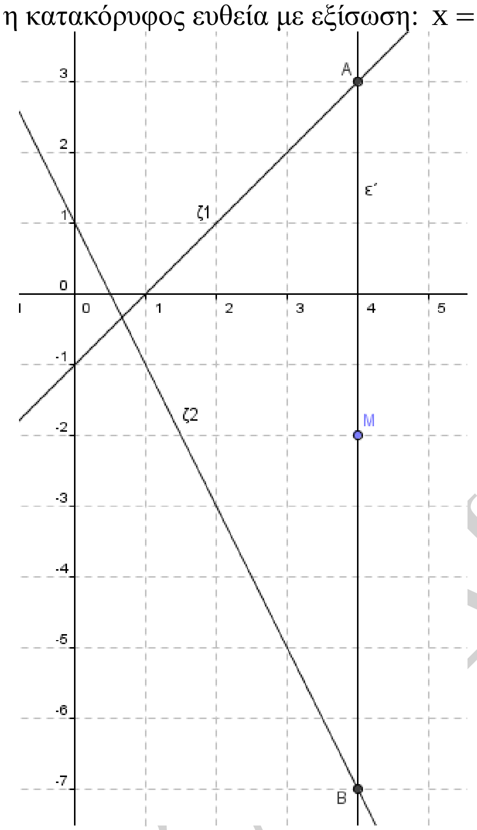
Α, Β θα ισχύει: $\frac{x_A + x_B}{2} = 4 \Leftrightarrow x_A + x_B = 8$ (1)

$\frac{y_A + y_B}{2} = -2 \Leftrightarrow y_A + y_B = -4$ (2)

$x_A - y_A - 1 = 0 \Leftrightarrow y_A = x_A - 1$ (3) και

$2x_B + y_B - 1 = 0 \Leftrightarrow y_B = 1 - 2x_B$ (4)

Αντικαθιστώντας στη (2) τα y_A, y_B από τις (3), (4) βρίσκουμε $x_A = x_B = 4$ και τελικά $A(4,3)$ και $B(4,-7)$. Επομένως η ζητούμενη ευθεία είναι η κατακόρυφος ευθεία με εξίσωση: $x = 4$



Σημείωση:

Το παραπάνω ερώτημα λύνεται και γεωμετρικά ως εξής: Αν Θ το σημείο τομής των (ε_1) και (ε_2) και Ν το συμμετρικό του Θ ως προς Μ τότε τα Α, Β είναι κορυφές του παραλληλογράμμου ΘΑΝΒ οπότε προσδιορίζονται.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Δίνεται η ευθεία (ε): $x - y - 3 = 0$ και το σημείο $A(6,-1)$.

Α) Να βρεθεί το συμμετρικό σημείο Β του Α ως προς την ευθεία (ε).

Β) Να βρείτε την εξίσωση του κύκλου (c) που έχει κέντρο το Β αποκόπτει από την ευθεία ε τμήμα με μήκος $4\sqrt{2}$.

Λύση

Α) Αν Β το συμμετρικό ενός σημείου Α ως προς ευθεία (ε) και $A \notin (\varepsilon)$ τότε η ευθεία (ε) είναι μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ και αντιστρόφως.

Προφανώς $A \notin (\varepsilon)$, αφού $x_A - y_A - 3 = 4 \neq 0$

Έστω $B(\mu, \nu)$ με $B \neq A$ το ζητούμενο σημείο οπότε $\overrightarrow{AB} = (\mu - 6,\ \nu + 1) \neq \vec{0}$. Πρέπει και αρκεί το μέσο Μ του ΑΒ να ανήκει στην (ε) και το τμήμα ΑΒ να είναι κάθετο στην ευθεία (ε). Όμως $M\left(\frac{\mu+6}{2}, \frac{\nu-1}{2}\right)$, οπότε:

$$M \in (\varepsilon) \Leftrightarrow \frac{\mu+6}{2} - \frac{\nu-1}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow \mu - \nu = -1 \text{ (1).}$$

Επειδή ο συντελεστής διεύθυνσης της (ε) είναι $1 \neq 0$ για να είναι $(\varepsilon) \perp AB$ πρέπει και αρκεί το ΑΒ να έχει συντελεστή διεύθυνσης δηλαδή $\mu \neq 6$ και $\lambda_{AB} \cdot \lambda_{(\varepsilon)} = -1$ (2).

Αλλά $(2) \Leftrightarrow \frac{\nu+1}{\mu-6} \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \nu + \mu = 5$ (3)

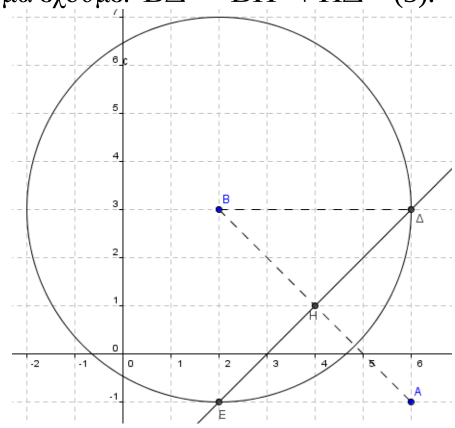
Λύνοντας το σύστημα των (1) και (3) έχουμε: $\nu = 3$ και $\mu = 2$. Άρα το ζητούμενο σημείο είναι το $B(2,3)$.

Συντομότερα: Έχουμε: $(\varepsilon) // \vec{v} = (1,1)$ και $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, οπότε

$$(\varepsilon) \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{v} \perp \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1(\mu - 6) + 1(\nu + 1) = 0 \Leftrightarrow \mu + \nu = 5 \text{ κ.λ.π.}$$

Β) Έστω Δ και Ε τα σημεία που η ευθεία ε τέμνει τον κύκλο (c). Αν Η η προβολή του Β στην ε, το τρίγωνο ΒΗΔ είναι ορθογώνιο. Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε: $B\Delta^2 = BH^2 + H\Delta^2$ (3).



Όμως, $BH = d(B,\varepsilon) = \dfrac{|2-3-3|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$

και $H\Delta = 2\sqrt{2}$. Οπότε : $B\Delta^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2$

$\Leftrightarrow B\Delta^2 = 16 \Leftrightarrow B\Delta = 4$. Άρα ο κύκλος έχει ακτίνα 4 και εξίσωση: $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Δίνεται η εξίσωση:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + 2\lambda x + 2(1+\lambda)y + 1 + 2\lambda = 0 \qquad (1),}$$

$\boldsymbol{\lambda \in \mathbb{R}^*}$.

Α) Να αποδειχθεί ότι η (1) παριστάνει κύκλο για κάθε $\boldsymbol{\lambda \in \mathbb{R}^*}$

Β) Να αποδειχθεί ότι όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) διέρχονται από σταθερό σημείο

Γ) Να αποδειχθεί ότι οι παραπάνω κύκλοι εφάπτονται στην ευθεία (ε) με εξίσωση: $\boldsymbol{x + y + 1 = 0}$

Δ) Αν (c_1) και (c_2) οι κύκλοι που προκύπτουν από την (1) για $\boldsymbol{\lambda = 1}$ και $\boldsymbol{\lambda = -2}$ αντίστοιχα, να δείξετε ότι η εφαπτόμενες από το σημείο $\boldsymbol{A(-4,-5)}$ στον κύκλο (c_1) εφάπτονται και στον κύκλο (c_2).

Λύση

Α) Αν $A = 2\lambda$, $B = 2(1+\lambda)$ και $\Gamma = 1 + 2\lambda$ τότε

$A^2 + B^2 - 4\Gamma = (2\lambda)^2 + \left[2(1+\lambda)\right]^2 - 4(1+2\lambda) =$

$\ldots = 8\lambda^2 > 0$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Άρα η (1) παριστάνει κύκλο με κέντρο $K\left(-\dfrac{A}{2}, -\dfrac{B}{2}\right) = (-\lambda, -\lambda - 1)$ και ακτίνα

$\rho = \dfrac{\sqrt{8\lambda^2}}{2} = |\lambda|\sqrt{2}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Β) Ζητάμε σημείο (x_0, y_0), τέτοιο ώστε $x_0^{\,2} + y_0^{\,2} + 2\lambda x_0 + 2(1+\lambda)y_0 + 1 + 2\lambda = 0$

δηλαδή $x_0^{\,2} + (y_0 + 1)^2 + 2\lambda(x_0 + y_0 + 1) = 0 \quad (2)$

για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Για να έχει η εξίσωση (2) (ως προς λ) άπειρες λύσεις (τουλάχιστον δύο) πρέπει και αρκεί: $\begin{cases} x_0^{\,2} + (y_0+1)^2 = 0 \\ x_0 + y_0 + 1 = 0 \end{cases}$ που προφανώς ισχύει για $(x_0, y_0) = (0, -1)$. Άρα υπάρχει ζεύγος $(x_0, y_0) = (0, -1)$ για το οποίο η εξίσωση (2) αληθεύει για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$. Το ζεύγος αυτό είναι οι συντεταγμένες του σημείου από το οποίο διέρχονται όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η εξίσωση (1).

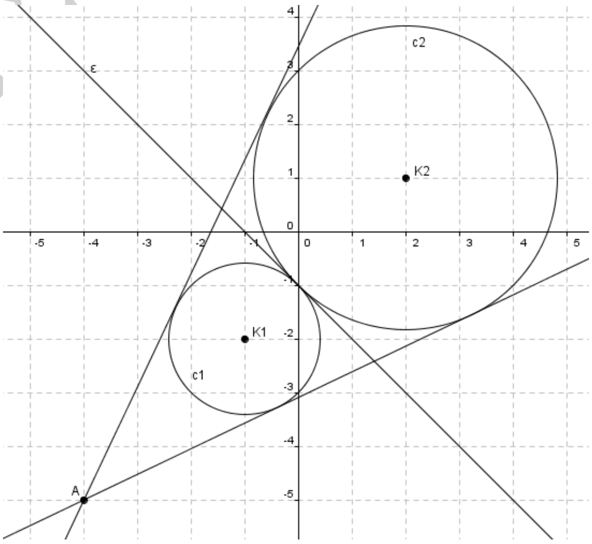
Γ) Μια ευθεία εφάπτεται σε ένα κύκλο αν και μόνο αν το κέντρο του κύκλου απέχει από την ευθεία όσο η ακτίνα του.

Έχουμε,

$$d(K,\varepsilon) = \frac{|-\lambda - 1 - \lambda + 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{2|\lambda|}{\sqrt{2}} = |\lambda|\sqrt{2} = \rho.$$

Άρα όλοι οι κύκλοι που παριστάνει η (1) εφάπτονται στην ε.

Δ) Για $\lambda = 1$ και για $\lambda = -2$ προκύπτουν οι κύκλοι (c_1) και (c_2) με κέντρα $K_1(-1,-2)$, $K_2(2,1)$ και ακτίνες $\rho_1 = \sqrt{2}$ και $\rho_2 = 2\sqrt{2}$ αντίστοιχα. Προφανώς η εφαπτόμενη του κύκλου (c_1) από το Α δεν είναι κατακόρυφη (γιατί;) Έστω $y - 5 = \lambda(x+4)$ δηλαδή $\lambda x - y + 4\lambda + 5 = 0$ η εξίσωση της ζητούμενης ευθείας η. Αρκεί να αποδείξουμε ότι: $d(K_1,\eta) = \rho_1 \Rightarrow d(K_2,\eta) = \rho_2$



Πράγματι:

$$d(K_1,\eta) = \frac{|-\lambda + 2 + 4\lambda - 5|}{\sqrt{\lambda^2 + 1^2}} = \frac{|3\lambda - 3|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{3|\lambda - 1|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \quad (2)$$

$$d(K_2,\eta) = \frac{|2\lambda - 1 + 4\lambda - 5|}{\sqrt{\lambda^2 + 1^2}} = \frac{|6\lambda - 6|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \frac{6|\lambda - 1|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} \quad (3)$$

Άρα: $d(K_1,\eta) = \rho_1 \overset{(2)}{\Rightarrow} \dfrac{3|\lambda - 1|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = \sqrt{2} \Rightarrow$

$\dfrac{6|\lambda + 1|}{\sqrt{\lambda^2 + 1}} = 2\sqrt{2} \overset{(3)}{\Rightarrow} d(K_2,\eta) = \rho_2$.