Η ΜΟΝΟΤΟΝΙΑ ΚΑΙ ΤΟ "1 – 1" ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΣΤΗΝ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΩΝ ΑΝΙΣΩΣΕΩΝ ΚΑΙ ΤΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Πολλές φορές στην επίλυση ανισώσεων και εξισώσεων παρατηρούμε μια "μηχανίστικη" διαδικασία, που άλλοτε οδηγεί σε σωστό αποτέλεσμα άλλοτε όμως σε λάθος.

Ο σκοπός στη λύση μιας ανίσωσης ή εξίσωσης δεν είναι όμως το αποτέλεσμα αλλά η επίλυση μέσα από εφαρμογή της αντίστοιχης θεωρίας. Δίνουμε λοιπόν στο άρθρο αυτό την ευκαιρία στους μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου αλλά και της Γ΄ Λυκείου, να θυμηθούν και να εμπεδώσουν καλύτερα το ρόλο των εννοιών: "μονοτονία" και "1 – 1" στην επίλυση ανισώσεων και εξισώσεων.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1.

Να λυθούν οι ανισώσεις:

α) $3^{x^2-5x+6}<1$ **(1),β)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x}<1$ **(2)**

ΛΥΣΗ

α) $3^{x^2-5x+6}<1 \Leftrightarrow 3^{x^2-5x+6}<3^0 \Leftrightarrow$

$x^2-5x+6<0 \Leftrightarrow 2<x<3$

β) $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x}<1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2-3x}<\left(\frac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow x^2-3x>0 \Leftrightarrow$

$x<0$ ή $x>3$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2.

Να λυθεί η εξίσωση: $2^{x^2-5x+6}=1$

ΛΥΣΗ

$2^{x^2-5x+6}=1 \Leftrightarrow 2^{x^2-5x+6}=2^0 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow$
$x=2$ ή $x=3$

Παρατηρούμε λοιπόν, ότι στην ανίσωση (1) η φορά της, διατηρήθηκε ενώ στην ανίσωση (2) άλλαξε. Γιατί συμβαίνει αυτό;

ΑΝ ΔΕ ΜΠΟΡΕΙΤΕ ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΤΟ ΕΡΩΤΗΜΑ ΑΥΤΟ, ΑΞΙΖΕΙ ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΕΤΕ ΤΗ ΣΥΝΕΧΕΙΑ...

Α. ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Έστω μια συνάρτηση f με π.ο. το $A\subseteq\mathbb{R}$

- Αν η f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Α τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$\boxed{\text{αν } x_1<x_2 \text{ τότε } f(x_1)<f(x_2)}$, (1)

Θα αποδείξουμε ότι ισχύει και αντιστρόφως

Δηλαδή για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$\boxed{\text{αν } f(x_1)<f(x_2) \text{ τότε } x_1<x_2}$, (2)

Πράγματι:

Έστω $x_1, x_2\in A$ με $f(x_1)<f(x_2)$ τότε:

- αν $x_1>x_2$ τότε $f(x_1)>f(x_2)$ (αφού f **γνησίως αύξουσα**), άτοπο!
- αν $x_1=x_2$ τότε $f(x_1)=f(x_2)$ (ορισμός της **συνάρτησης**), άτοπο!

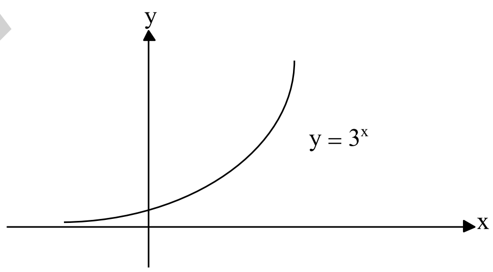
Άρα: $x_1<x_2$

Από τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο Α τότε:

Για κάθε $x_1, x_2\in A$, $\boxed{f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow x_1<x_2}$, (3)

Η τελευταία ισοδυναμία (3) μας δίνει τη δυνατότητα να επιλύουμε ανισώσεις όπως στο προηγούμενο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1α.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ 1Α



Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=3^x$,$x\in\mathbb{R}$, που ως γνωστόν είναι **γνησίως αύξουσα** (αφού 3 >1), (ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ)

Άρα για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$\boxed{f(x_1)<f(x_2)\Leftrightarrow x_1<x_2}$ δηλ. $\boxed{3^{x_1}<3^{x_2}\Leftrightarrow x_1<x_2}$

Έτσι έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

$3^{x^2-5x+6}<1 \Leftrightarrow 3^{x^2-5x+6}<3^0 \Leftrightarrow$
$f(x^2-5x+6)<f(0)\Leftrightarrow x^2-5x+6<0\Leftrightarrow$
$2<x<3$.

- Αν η f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο Α τότε για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει:

$\boxed{\text{αν } x_1<x_2 \text{ τότε } f(x_1)>f(x_2)}$, (4)

Με όμοιους συλλογισμούς (με τα προηγούμενα) αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο: Δηλαδή για κάθε $x_1,x_2\in\mathbb{R}$ ισχύει:

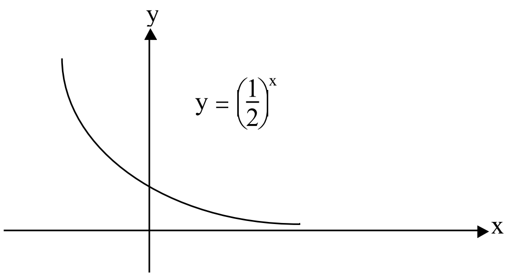
$\boxed{\text{αν } f(x_1)>f(x_2) \text{ τότε } x_1<x_2}$, (5)

Από τις σχέσεις (4) και (5) έχουμε ότι:
Αν μια συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο A τότε:

Για κάθε $x_1, x_2 \in A$, $\boxed{f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 < x_2}$, (6)

Η τελευταία ισοδυναμία (6) μας δίνει τη δυνατότητα να επιλύουμε ανισώσεις όπως στο προηγούμενο ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1β.

ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ 1Β



Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x, x \in \mathbb{R}$ που ως γνωστόν είναι **γνησίως φθίνουσα** (αφού $\frac{1}{2} < 1$), (ΕΚΘΕΤΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ)

Άρα για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$\boxed{f(x_1) < f(x_2) \Leftrightarrow x_1 > x_2}$ ή $\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^{x_1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2}$

Έτσι έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 3x} < 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{x^2 - 3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 \Leftrightarrow$

$f(x^2 - 3x) < f(0) \Leftrightarrow x^2 - 3x > 0 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x > 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, να λυθεί η ανίσωση: $f(x^3 + 5x) > f(6)$

ΛΥΣΗ

Αφού η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει:
$f(x^3 + 5x) > f(6) \Leftrightarrow x^3 + 5x > 6 \Leftrightarrow$
$(x - 1)(x^2 + x + 6) > 0 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$
(Σημείωση:
$x^2 + x + 6 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αφού πρόκειται για ανίσωση β΄ βαθμού με διακρίνουσα αρνητική.)

Άρα: $\boxed{x \in (1, +\infty)}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο [0, 2π] και f(0) = 2006 να λυθεί ανίσωση: f(ημx) > 2006

ΛΥΣΗ

Αφού η συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο [0, 2π] θα ισχύει:
$f(\eta\mu x) > f(0) \Leftrightarrow \eta\mu x < 0 \Leftrightarrow \pi < x < 2\pi$

Άρα: $\boxed{x \in (\pi, 2\pi)}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 5

Να λυθεί στο $\mathbb{R}$ η ανίσωση:
$\mathbf{e^{x^2+x+1} - e^{x+1} + x^2 > 0 (1)}$

ΛΥΣΗ

Η (1) γράφεται: $e^{x^2+x+1} - e^{x+1} + x^2 > 0 \Leftrightarrow$
$e^{x^2+x+1} - e^{x+1} + (x^2 + x + 1) - (x + 1) > 0 \Leftrightarrow$
$e^{x^2+x+1} + (x^2 + x + 1) > e^{x+1} + (x + 1)(2)$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = e^x + x$, $x \in \mathbb{R}$. **Έστω** $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ (3)

Επειδή η συνάρτηση $g(x) = e^x$ είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$ θα ισχύει: $e^{x_1} < e^{x_2}$ (4).
Προσθέτοντας τις (3) και (4) έχουμε: $e^{x_1} + x_1 < e^{x_2} + x_2$ **δηλ.** $f(x_1) < f(x_2)$. **Άρα** η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο $\mathbb{R}$.

Επομένως έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες:
$(2) \Leftrightarrow f(x^2 + x + 1) > f(x + 1) \Leftrightarrow$
$x^2 + x + 1 > x + 1 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

Άρα: οι λύσεις της (1) είναι το σύνολο: $\boxed{A = \mathbb{R}^*}$

Β. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Έστω συνάρτηση f με π.ο. το $A \subseteq \mathbb{R}$ και $x_1, x_2 \in A$
Από τον ορισμό της συνάρτησης έχουμε ότι:

$\boxed{\text{Αν } x_1 = x_2 \text{ τότε } f(x_1) = f(x_2)}$ (1)

(ή ισοδύναμα : Αν $f(x_1) \neq f(x_2)$ τότε $x_1 \neq x_2$)
Αν η συνάρτηση f είναι "**1 – 1**" τότε για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει:

Αν $x_1 \neq x_2$ τότε $f(x_1) \neq f(x_2)$ ή ισοδύναμα:

$\boxed{\text{Αν } f(x_1) = f(x_2) \text{ τότε } x_1 = x_2}$ (2)

Από τις (1) και (2) έπεται ότι: αν μια συνάρτηση f με π.ο. το $A \subseteq \mathbb{R}$ είναι "**1 – 1**" τότε για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει :

$\boxed{f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2}$ (3)

Σημείωση: *Κάθε γνησίως μονότονη συνάρτηση στο πεδίο ορισμού της είναι "**1 – 1**". Η παραπάνω ισοδυναμία (3) μας δίνει τη δυνατότητα να επιλύουμε εξισώσεις όπως στο παραπάνω* ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

<u>ΕΠΕΞΗΓΗΣΗ</u> <u>ΤΟΥ</u> <u>ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΟΣ</u> 2

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = 2^x$ στο $\mathbb{R}$ που ως γνωστό είναι "**1 – 1**".

Άρα: Για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$\boxed{f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2}$ ή $\boxed{2^{x_1} = 2^{x_2} \Leftrightarrow x_1 = x_2}$

Άρα: έχουμε τις ισοδυναμίες:

$2^{x^2-5x+6} = 1 \Leftrightarrow 2^{x^2-5x+6} = 2^0 \Leftrightarrow$

$f(x^2 - 5x + 6) = f(0) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$x = 2$ ή $x = 3$.

Άρα: Λύσεις της εξίσωσης είναι οι τιμές $x = 2$ ή $x = 3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6

α) Να αποδειχθεί ότι: αν $e^{\alpha} + 2\alpha = e^{\beta} + 2\beta$ τότε $\alpha = \beta$

β) Να λυθεί η εξίσωση:

$$e^{6-x} - e^{x^2} = 2x^2 + 2x - 12. \quad (\varepsilon)$$

ΛΥΣΗ

α) Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = e^x + 2x$, $x \in \mathbb{R}$. Αν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ έχουμε: $e^{x_1} < e^{x_2}$ (1), και $2x_1 < 2x_2$ (2). Από (1) και (2) προκύπτει ότι: $e^{x_1} + 2x_1 < e^{x_2} + 2x_2$ δηλ. $f(x_1) < f(x_2)$.

Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, επομένως και "**1 – 1**". Άρα θα ισχύει: " αν $f(\alpha) = f(\beta)$ τότε $\alpha = \beta$" δηλ. "αν $e^{\alpha} + 2\alpha = e^{\beta} + 2\beta$ τότε $\alpha = \beta$".

β) Η εξίσωση (ε) γράφεται:

$e^{6-x} + 2(6 - x) = e^{x^2} + 2x^2 \quad (\varepsilon_1)$

Σύμφωνα με το ερώτημα (α) η συνάρτηση $f(x) = e^x + 2x$ είναι "**1 – 1**" στο $\mathbb{R}$.

Άρα θα ισχύει η ισοδυναμία:

$(\varepsilon_1) \Leftrightarrow f(6 - x) = f(x^2) \Leftrightarrow 6 - x = x^2 \Leftrightarrow$

$x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -3$.

Άρα: Λύσεις της εξίσωσης είναι οι τιμές $x = 2$ ή $x = -3$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 7

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2 - \sqrt{x-1}}$.

α) Να αποδειχθεί ότι αντιστρέφεται

β) Να λυθεί η εξίσωση:

$$\sqrt{2 - \sqrt{x-1}} = \sqrt{2 - \sqrt{x^2-1}} \quad (1)$$

ΛΥΣΗ

α) Το π.ο. της f είναι το A = [1, 5] (γιατί;)

Έστω $x_1, x_2 \in A$ με $f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow$

$\sqrt{2 - \sqrt{x_1-1}} = \sqrt{2 - \sqrt{x_2-1}} \Leftrightarrow$

$2 - \sqrt{x_1-1} = 2 - \sqrt{x_2-1} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow x_1 = x_2$

Άρα η συνάρτηση f είναι "**1 – 1**" δηλ. **αντιστρέφεται**.

β) Σύμφωνα με το ερώτημα (α) έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

$(1) \Leftrightarrow f(x) = f(x^2) \Leftrightarrow x = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0 \Leftrightarrow$

$x(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (απορρ.) ή $x = 1$.

Άρα: Λύση της εξίσωσης είναι η τιμή $x = 1$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 8

Να λυθεί η εξίσωση:

$$\log_2(7 + 3^{2x-2}) = 2 + \log_2(1 + 3^{x-1}) \quad (1)$$

ΛΥΣΗ

Πρέπει: $7 + 3^{2x-2} > 0$ και $1 + 3^{x-1} > 0$ που ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η (1) γράφεται: (1) $\Leftrightarrow$

$\log_2(7 + 3^{2x-2}) = \log_2 4 + \log_2(1 + 3^{x-1}) \Leftrightarrow$

$\log_2(7 + 3^{2x-2}) = \log_2[4\cdot(1 + 3^{x-1})] \quad (2)$

Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x) = \log_2 x$, $x > 0$ που είναι "**1 – 1**"στο $(0, +\infty)$.

Έτσι έχουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες:

$(2) \Leftrightarrow f(7 + 3^{2x-2}) = f[4\cdot(1 + 3^{x-1})] \Leftrightarrow$

$7 + 3^{2x-2} = 4\cdot(1 + 3^{x-1}) \Leftrightarrow$

$7 + 3^{2x}\cdot\dfrac{1}{9} = 4 + 4\cdot 3^x\cdot\dfrac{1}{3} \Leftrightarrow$

$\ldots (3^x)^2 - 12\cdot 3^x + 27 = 0 \quad (3)$

Θέτω: $\psi = 3^x > 0$ οπότε η (3) γίνεται:

$\psi^2 - 12\psi + 27 = 0 \Leftrightarrow \psi = 9$ ή $\psi = 3$

Άρα: $3^x = 9$ ή $3^x = 3 \Leftrightarrow 3^x = 3^2$ ομοίως

$3^x = 3^1 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = 1$(γιατί;)

(Σημείωση:

*Η απάντηση βέβαια είναι γιατί η συνάρτηση $h(x) = e^x$ είναι "**1 – 1**" στο $\mathbb{R}$, οπότε:*

$3^x = 3^2 \Leftrightarrow h(x) = h(2) \Leftrightarrow x = 2$ *ή*

$3^x = 3^1 \Leftrightarrow h(x) = h(1) \Leftrightarrow x = 1$*)*

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 9

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{\alpha^x - x^3\beta^x}{\beta^x}$ όπου α, β θετικοί αριθμοί με $\alpha < \beta$. i) Να μελετηθεί ως προς τη μονοτονία

iii) Να λυθεί ως προς $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση:

$$(\alpha^{\lambda^3} - \lambda^9\cdot\beta^{\lambda^3})\cdot\beta^{7\lambda-6} = [\alpha^{7\lambda-6} - (7\lambda-6)^3\beta^{7\lambda-6}]\cdot\beta^{\lambda^3} \quad (1)$$

ΛΥΣΗ

(Η άσκηση αυτή είναι διασκευή άσκησης από το βιβλίο: THEMES MATHEMATIQUES *του* GASTON ALINIAC*.ΕΚΔ. "ΑΙΘΡΑ")*

i) Η f γράφεται: $f(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x - x^3$

Όμως: $0 < \alpha < \beta \Leftrightarrow 0 < \frac{\alpha}{\beta} < 1$, άρα: η $g(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^x$ είναι συνάρτηση γνησίως φθίνουσα.

Υποθέτουμε: ότι $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$

Άρα: $\begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_1} > \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_2} \\ x_1^3 < x_2^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_1} > \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_2} \\ -x_1^3 > -x_2^3 \end{cases}$

Άρα: $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_1} - x_1^3 > \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{x_2} - x_2^3$

Άρα: $f(x_1) > f(x_2)$, δηλ. η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση

ii) Αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα, η f είναι και "1 − 1" *(γιατί;)*

iii) Η (1) γίνεται:

$$\frac{\alpha^{\lambda^3} - (\lambda^3)^3 \cdot \beta^{\lambda^3}}{\beta^{\lambda^3}} = \frac{\alpha^{7\lambda - 6} - (7\lambda - 6)\beta^{7\lambda - 6}}{\beta^{7\lambda - 6}} \Leftrightarrow$$

$f(\lambda^3) = f(7\lambda - 6) \Leftrightarrow$ *(επειδή η f είναι "1 − 1")*

$\lambda^3 = 7\lambda - 6 \Leftrightarrow$

$\lambda^3 - 7\lambda + 6 = 0 \Leftrightarrow$

$(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$ ή $\lambda = 2$ ή $\lambda = -3$

Λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί: 1, 2 και −3.