ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΤΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Του Κώστα Βακαλόπουλου

ΑΣΚΗΣΗ 1 (ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ)

Το εύρος (R) των παρατηρούμενων υψών των 200 πελατών ενός γυμναστηρίου είναι 55cm.

A) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα των υψών σε 5 ισοπλατείς κλάσεις αν γνωρίζετε ότι το άθροισμα των κεντρικών τιμών των 5 κλάσεων είναι 887,5cm.

B) Οι συχνότητες των κλάσεων που θα προκύψουν στο ερώτημα A) είναι: $\nu_1 = 20$ $\nu_2 = 50$, $\nu_3 = 60$, $\nu_4 = 50$ και $\nu_5 = 20$. Κατατάσσουμε τους πελάτες σε αύξουσα σειρά ύψους. Να βρείτε το ύψος για το οποίο η πιθανότητα οι πελάτες του γυμναστηρίου να έχουν ύψος μεγαλύτερο από αυτό να είναι το πολύ 50%.

Λύση

A) Στις ισοπλατείς κλάσεις αν c το πλάτος των κλάσεων και κ το πλήθος των κλάσεων ισχύει: $c = \frac{R}{\kappa}$. Άρα: $c = \frac{55}{5} = 11(\text{cm})$. Επειδή τα κέντρα των κλάσεων x_i, $i = 1,2,3,4,5$ αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $1^{\text{ο}}$ όρο x_1 διαφορά $\omega = c = 11$ και πλήθος $\nu = 5$, από τον τύπο του αθροίσματος των πρώτων ν διαδοχικών όρων της αριθμητικής προόδου:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}\left[2\alpha_1 + (\nu-1)\omega\right], \text{ έχουμε:}$$

$$887,5 = \frac{5}{2}\left[2x_1 + (5-1)c\right] \Leftrightarrow 1775 = 10x_1 + 20\cdot 11$$

$$\Leftrightarrow 1775 = 10x_1 + 20\cdot 11 \Leftrightarrow x_1 = 155,5 \ .$$

Οπότε οι κλάσεις είναι:

$$\left[155,5 - \frac{11}{2}, 155,5 + \frac{11}{2}\right) = [150,161),$$

$$[155+11, 161+11) = [161,172)$$

$$[161+11, 172+11) = [172,183)$$

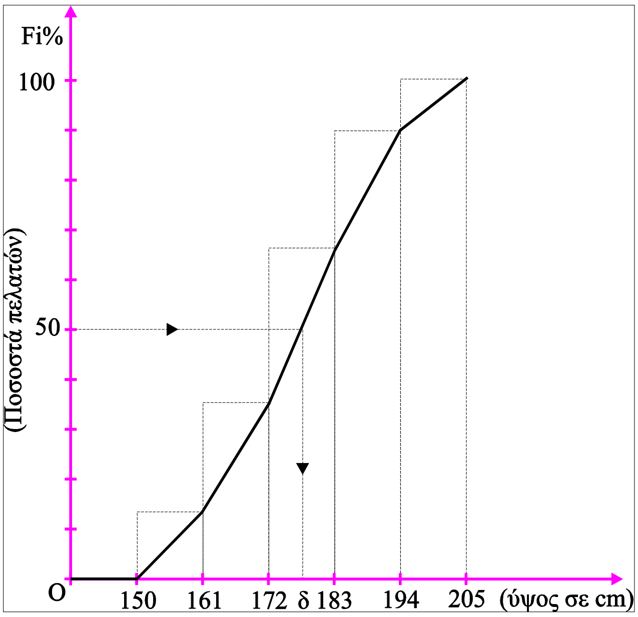
$$[172+11, 183+11) = [183,194)$$

$$[183+11, 194+11) = [194,205)$$

B) Σύμφωνα με τα δεδομένα έχουμε τον παρακάτω πίνακα κατανομής συχνοτήτων (περιέχει όσες συχνότητες χρειαζόμαστε)

Κλάσεις	x_i	ν_i	$f_i\%$	$F_i\%$
$[150,161)$	155,5	20	10	10
$[161,172)$	166,5	50	25	35
$[172,183)$	177,5	60	30	65
$[183,194)$	188,5	50	25	90
$[194,205)$	199,5	20	10	100
		200	100	

Το ζητούμενο ύψος είναι η διάμεσος των παρατηρούμενων υψών. Για να το προσδιορίσουμε θα χαράξουμε το πολύγωνο σχετικών αθροιστικών συχνοτήτων επί τοις εκατό και θα διαβάσουμε την τετμημένη του σημείου του με τεταγμένη 50.



$$\delta = 172 + \frac{183-172}{2} = 172 + 5,5 = 177,5(\text{cm})$$

Το ζητούμενο ύψος είναι: 177,5 (cm)

ΑΣΚΗΣΗ 2
(ΑΝΑΛΥΣΗ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ)

Δίνεται η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x)=\alpha x^3-\frac{3}{2}\beta x^2+3x+2013,\ x\in\mathbb{R}}.$$

Οι συντελεστές α, β προκύπτουν από τη ρίψη ενός ζαριού δυο φορές.

Α) Να βρεθεί ο δειγματικός χώρος του πειράματος.

Β) Να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου Α: η εφαπτόμενη στο σημείο $(1,f(1))$ της γραφικής παράστασης της f να σχηματίζει αμβλεία γωνία με τον άξονα x΄x.

Γ) Αν Β το ενδεχόμενο το ζάρι να φέρει και στις δύο ρίψεις το ίδιο αποτέλεσμα, να βρεθεί η πιθανότητα του ενδεχομένου: «να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β».

Λύση

Α) Συμπληρώνουμε τον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου:

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
2	(2,1)	(2,1)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,5)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
4	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
5	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
6	(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

Άρα: $\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),...,(6,5),(6,6)\}$ με $N(\Omega)=36$

Β) $f'(x)=3\alpha x^2-3\beta x+3,\ x\in\mathbb{R}$

Πρέπει: $f'(1)<0\Leftrightarrow 3\alpha-3\beta+3<0\Leftrightarrow \alpha-\beta<-1$

Από τον παραπάνω πίνακα έχουμε ότι:

$A=\{(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),$
$(3,5),(3,6),(4,6)\}$ με $N(A)=10$

Άρα: $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\boxed{\dfrac{10}{36}}$

Γ) $B=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}$ με $N(B)=6$. Άρα: $P(B)=\dfrac{N(B)}{N(\Omega)}=\boxed{\dfrac{6}{36}}$

Τα ενδεχόμενα Α, Β είναι ασυμβίβαστα αφού $A\cap B=\varnothing$. Άρα: $P(A\cap B)=0$.

Έστω Γ το ζητούμενο ενδεχόμενο. Τότε $\Gamma=(A-B)\cup(B-A)\Rightarrow$

$$P(\Gamma)=P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]\overset{(A-B)\cap(B-A)=\varnothing}{=}$$

$$P(A-B)+P(B-A)=P(A)+P(B)-\cancel{2P(A\cap B)}$$

$$=\frac{10+6}{36}=\frac{16}{36}=\boxed{\frac{4}{9}}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3
(ΑΝΑΛΥΣΗ-ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ)

Δίνεται η συνάρτηση:

$$\mathbf{f(x)=2\alpha x^3-3\beta x^2+x+2013,\ x\in\mathbb{R}}$$

Αν τα α, β παίρνουν τιμές από το σύνολο: $\{1,2,3,4\}$, να βρείτε:

Α) Τη πιθανότητα του ενδεχομένου Α:η συνάρτηση f να μη παρουσιάζει ακρότατο στο $\mathbb{R}$.

Β) Το σημείο Μ της γραφικής παράστασης της f στο οποίο η f'' είναι μηδέν.

Γ) Τη πιθανότητα του ενδεχομένου Β: η εφαπτόμενη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο Μ να είναι παράλληλη στην ευθεία $\varepsilon: y=-x+1$.

Δ) Τη πιθανότητα ώστε να μη πραγματοποιείται κανένα από τα ενδεχόμενα Α και Β.

Λύση

Κατ' αρχήν ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι το σύνολο:

$\Omega=\{(1,1),(1,2),(1,3),...,(4,3),(4,4)\}$ με $N(\Omega)=16$

Α) Η συνάρτηση f δεν παρουσιάζει ακρότατα στο $\mathbb{R}$ αν η διακρίνουσα Δ της παραγώγου είναι μικρότερη ή ίση του μηδενός. Έχουμε $f'(x)=6\alpha x^2-6\beta x+1$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$. Πρέπει:

$\Delta=(-6\beta)^2-4\cdot 6\alpha\le 0\Leftrightarrow 6\beta^2-4\alpha\le 0$

$\Leftrightarrow 3\beta^2\le 2\alpha$.

Για τη διευκόλυνσή μας σχεδιάζουμε τους παρακάτω πίνακες:

α	1	2	3	4
2α	2	4	6	8

β	1	2	3	4
$3\beta^2$	3	12	27	48

Έτσι: $A=\{(2,1),(3,1),(4,1)\}$ με $N(A)=3$

Άρα: $P(A)=\dfrac{N(A)}{N(\Omega)}=\boxed{\dfrac{3}{16}}$

Β) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$, $f''(x)=12\alpha x-6\beta$

$$f''(x)=0 \Leftrightarrow 12\alpha x-6\beta=0 \Leftrightarrow x=\frac{\beta}{2\alpha}$$

Γ) Πρέπει:

$$f'\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)=-1 \Leftrightarrow 6\alpha\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2-6\beta\left(\frac{\beta}{2\alpha}\right)+1=-1$$

$$\Leftrightarrow \frac{6\alpha\beta^2}{4\alpha^2}-\frac{6\beta^2}{2\alpha}+1=-1 \Leftrightarrow \frac{-3\beta^2}{2\alpha}=-2 \Leftrightarrow 4\alpha=3\beta^2$$

Έχουμε:

β	1	2	3	4
$3\beta^2$	3	12	27	48

Άρα: $B=\{(3,2)\} \Rightarrow P(B)=\dfrac{N(A)}{N(B)}=\boxed{\dfrac{1}{16}}$

Δ) Επειδή $A\cap B=\varnothing$ τα Α, Β είναι ασυμβίβαστα. Άρα,

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)=\frac{3}{16}+\frac{1}{16}=\boxed{\frac{1}{4}}$$

Ζητείται η πιθανότητα του ενδεχομένου: $(A\cup B)'$.

Έτσι: $P(A\cup B)'=1-P(A\cup B4)=1-\dfrac{1}{4}=\boxed{\dfrac{3}{4}}$

ΑΣΚΗΣΗ 4
(ΑΝΑΛΥΣΗ-ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ)

Δίνεται η συνάρτηση

$$\mathbf{f(x)}=\begin{cases}\dfrac{\mathbf{x-1}}{\sqrt[3]{\mathbf{x}}-\mathbf{1}}, & \mathbf{x\geq 0 \text{ και } x\neq 1}\\[2mm] \dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\boldsymbol{\delta}, & \mathbf{x=1}\end{cases}$$

Όπου δ η διάμεσος ενός δείγματος που εξετάζεται ως προς μια μεταβλητή Χ που ακολουθεί τη κανονική κατανομή.

Α) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbf{x_0=1}$ να υπολογίσετε τη μέση τιμή $(\bar{\mathbf{x}})$ του δείγματος.

Β) Αν η τυπική απόκλιση του παραπάνω δείγματος είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης $\mathbf{g(x)=2\ln x(2-\ln x)}$, $\mathbf{x>0}$, να υπολογίσετε το εύρος του δείγματος και τον συντελεστή μεταβολής. Είναι το δείγμα ομοιογενές;

Γ) Να βρείτε το ποσοστό των παρατηρήσεων που βρίσκονται στο διάστημα $\mathbf{(5,11)}$.

Δ) Αν πάνω από 15 βρίσκονται τρεις παρατηρήσεις να βρεθεί το μέγεθος του δείγματος.

Λύση

Α) Επειδή η f είναι συνεχής στο 1 θα ισχύει:

$$\lim_{x\to 1} f(x)=f(1)\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{1}{3}\delta\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{1}{3}\delta\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)}\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1^2\right]}{\cancel{\sqrt[3]{x}-1}}=\frac{1}{3}\delta\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 1}\left[\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+\sqrt[3]{x}+1\right]=\frac{1}{3}\delta\Rightarrow 3=\frac{1}{3}\delta\Rightarrow\delta=9$$

Όμως η κατανομή είναι κανονική οπότε $\bar{x}=\delta=9$.

Β) Η g είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$g'(x)=\frac{2}{x}(2-\ln x)+2\ln x\left(-\frac{1}{x}\right)=\frac{4}{x}(1-\ln x)$$

$$g'(x)>0\Leftrightarrow 1-\ln x>0\Leftrightarrow 0<x<e$$

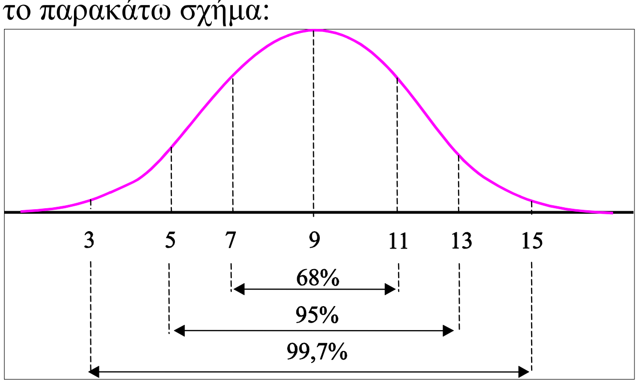
$$g'(x)<0\Leftrightarrow 1-\ln x<0\Leftrightarrow x>e$$

Άρα: Στο e η f παρουσιάζει μέγιστο το $g(e)=2$.

Οπότε $s=2$ και ο συντελεστής μεταβολής είναι:

$$CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{9}.$$

Γ) Επειδή η κατανομή είναι κανονική έχουμε το παρακάτω σχήμα:



($s=2$ και $\bar{x}=9$). Στο διάστημα $(5,11)$ βρίσκεται το $\left(68+\frac{95-68}{2}\right)\%=81,5\%$ των παρατηρήσεων.

Δ) Πάνω από 15 βρίσκεται το 0,15% των παρατηρήσεων. Αν έχουμε συνολικά ν παρατηρήσεις θα ισχύει:

$$0,0015\cdot\nu=3\Leftrightarrow\nu=3\div0,0015=2000.$$

ΑΣΚΗΣΗ 5 (ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ)

Από τους μαθητές ενός σχολείου το 45% είναι αγόρια. Το 70% των αγοριών και το 30% των κοριτσιών θα ακολουθήσει θετική ή τεχνολογική κατεύθυνση. Επιλέγουμε τυχαία ένα άτομο από τους μαθητές σχολείου.

Α) Να βρείτε τη πιθανότητα των ενδεχομένων:

i) Το άτομο αυτό να είναι κορίτσι ή να ακολουθεί τεχνολογική ή θετική κατεύθυνση.

ii) Το άτομο αυτό να είναι αγόρι και να ακολουθεί θεωρητική κατεύθυνση

Β) Αν τα κορίτσια του σχολείου που ακολουθούν θεωρητική κατεύθυνση είναι 77 να βρεθεί το πλήθος των μαθητών του σχολείου.

Λύση

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα:

Α: Το τυχαία επιλεγόμενο άτομο να είναι αγόρι.

Ισχύει: $P(A)=45\%=0,45$ ενώ η πιθανότητα να επιλεγεί κορίτσι είναι $P(A')=1-0,45=0,55$ και

Β: Το τυχαία επιλεγόμενο άτομο να ακολουθεί θετική ή τεχνολογική κατεύθυνση.

Ισχύει: $P(B)=70\%\cdot45\%+30\%\cdot55\%=0,315+0,165=0,48$. Επίσης:

$$P(A\cap B)=70\%\cdot45\%=31,5\%=0,315$$

Α) Ζητείται:

i) Η πιθανότητα του ενδεχομένου: $A'\cup B$

Όμως: $P(A'\cup B)=P(A')+P(B)-P(A'\cap B)$

$=1-P(A)+P(B)-P(B)+P(A\cap B)$

$=1-P(A)+P(A\cap B)=1-0,45+0,315=$

$0,865=86,5\%$.

ii) Το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι: $A\cap B'$

Όμως, $P(A\cap B')=P(A)-P(A\cap B)=0,45-0,315$

$=0,315=31,5\%$

Β) Η πιθανότητα του ενδεχομένου το τυχαία επιλεγόμενο άτομο να είναι κορίτσι και να ακολουθεί θεωρητική κατεύθυνση είναι: $55\%\cdot70\%=38,5\%$. Αν οι μαθητές του σχολείου είναι ν τότε:

$$38,5\%\cdot\nu=77\Leftrightarrow\nu=77\div0,385\Leftrightarrow\nu=200.$$

Τις παρακάτω ασκήσεις έστειλε ο συνάδελφος ΤΑΣΟΣ ΓΑΒΡΑΣ

ΑΣΚΗΣΗ 6 (ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ)

Από τον έλεγχο απουσιών του α΄τετραμήνου των μαθητών ενός σχολείου, προέκυψε ότι για κ μαθητές δεν σημειώθηκε καμία απουσία, ενώ λ μαθητές απουσίασαν ακριβώς μ ημέρες. Έστω s η τυπική απόκλιση του δείγματος των μαθητών που απουσίασαν το πολύ m ημέρες και ότι για το δείγμα αυτό το εύρος ισούται με $R=1$.

i) Να υπολογίσετε το μ.

ii) Να δείξετε ότι: $s^2\leq\frac{1}{2}$.

Λύση

i) Ας θεωρήσουμε Χ την μεταβλητή που μας δίνει το πλήθος των απουσιών των μαθητών στο α΄τετράμηνο. Επειδή $R=1$ και έχουμε ήδη την παρατήρηση $x_1=0$ (αφού κ μαθητές δεν έκαναν απουσία), δεδομένου και ότι οι ημέρες απουσίας είναι φυσικοί αριθμοί, συνεπάγεται ότι:

$$R=x_2-x_1\Leftrightarrow1=x_2-0\Leftrightarrow x_2=1$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι $\mu=1$ και η μεταβλητή Χ θα λαμβάνει μόνο δύο τιμές, τις $x_1=0$ με συχνότητα κ και την $x_2=1$ με συχνότητα λ.

ii) Δημιουργείται ο διπλανός σύντομος πίνακας.

x_i	ν_i
0	κ
1	λ

Έχουμε:

$$\bar{x}=\frac{x_1\cdot\nu_1+x_2\cdot\nu_2}{\nu_1+\nu_2}=\frac{0\cdot\kappa+1\cdot\lambda}{\kappa+\lambda}=\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}$$

και συνεπώς

$$s^2=\frac{\left(0-\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right)^2\cdot\kappa+\left(1-\frac{\lambda}{\kappa+\lambda}\right)^2\cdot\lambda}{\kappa+\lambda}=$$

$$\frac{\lambda^2\cdot\kappa+\kappa^2\cdot\lambda}{(\kappa+\lambda)^3}=\frac{\kappa\lambda(\kappa+\lambda)}{(\kappa+\lambda)^3}=\frac{\kappa\lambda}{(\kappa+\lambda)^2}=$$

$$\frac{\kappa\lambda}{\kappa^2+2\kappa\lambda+\lambda^2}\leq\frac{\kappa\lambda}{2\kappa\lambda}=\frac{1}{2}$$

Έχει σημασία η επισήμανση της εκφώνησης ότι το s αφορά τους μαθητές που απουσίασαν το πολύ μια φορά, αφού σε διαφορετική περίπτωση δεν θα μπορούσαμε να δεχθούμε ότι το μέγεθος του εξεταζόμενου δείγματος είναι $\kappa+\lambda$!

ΑΣΚΗΣΗ 7 (ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ)

Έστω ένα σύνολο των ν παρατηρήσεων ενός δείγματος με τιμές $x_i, i=1,2,3,4,5$ και αντίστοιχες απόλυτες συχνότητες ν_i, σχετικές συχνότητες f_i, αθροιστικές συχνότητες N_i και σχετικές αθροιστικές συχνότητες F_i, $i=1,2,3,4,5$.

i) Να βρείτε τη διάμεσο των αριθμών $0, 1, f_2, F_2, \nu, N_2, N_5, F_5$.

ii) Δίνεται ο παρακάτω πίνακας κατανομής σχετικών συχνοτήτων των παραπάνω μεταβλητών:

x_i	1	2	3	4	5
f_i	0,1	0,2	0,2	0,4	0,1

Να αποδείξετε ότι το μέγεθος του δείγματος είναι άρτιος αριθμός.

iii) Να υπολογίσετε τη διάμεσο του δείγματος.

iv) Να εξετάσετε αν το δείγμα είναι ομοιογενές και σε περίπτωση αρνητικής απάντησης, να υπολογίσετε τον ελάχιστο θετικό ακέραιο που πρέπει να προσθέσουμε στις παρατηρήσεις ώστε το δείγμα να είναι ομοιογενές.

Λύση

i) Έχουμε:

$0 \le f_2,\ F_2 = f_1 + f_2 \Rightarrow f_2 \le F_2 \le F_5 \le \nu$

Η μεταβλητή παίρνει την τιμή x_1 άρα $\nu_1 \ge 1$

και επειδή $\nu_1 = N_1 \Rightarrow \nu_1 \le N_2 \le N_5 = \nu$

Έτσι, οι εννέα αριθμοί σε αύξουσα σειρά είναι: $0, f_2, F_2, F_5, 1, \nu_1, N_2, N_5, \nu$.

Η διάμεσος είναι η πέμπτη παρατήρηση, δηλαδή $\delta = 1$.

ii) Από τα δεδομένα του πίνακα παρατηρούμε ότι: $f_1 + f_2 + f_3 = 0{,}50$ συνεπώς: $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 = \dfrac{\nu}{2}$.

Αν ν περιττός, τότε $\frac{\nu}{2} \notin \mathbb{N}$. Άρα ν άρτιος.

iii) Έχουμε ότι $f_1 + f_2 + f_3 = 0{,}50 \Rightarrow \delta = 3{,}5$

iv) Εμπλουτίζουμε τον πίνακά με νέες γραμμές για να διευκολυνθούμε στις πράξεις.

x_i	f_i	$x_i \cdot f_i$	$x_i^2 \cdot f_i$
1	0,1	0,1	0,1
2	0,2	0,4	0,8
3	0,2	0,6	1,8
4	0,4	1,6	6,4
5	0,1	0,5	2,5
Σύνολο	1	3,2	11,6

Έτσι, η μέση τιμή του δείγματος είναι: $\bar{x} = \sum_{i=1}^{5} x_i \cdot f_i = 3{,}2$ και η διακύμανση:

$s^2 = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 \cdot f_i - \bar{x}^2 = 11{,}6 - (3{,}2)^2 = 1{,}36$

Επομένως, ο συντελεστής μεταβλητότητας ισούται με $CV = \dfrac{\sqrt{1{,}36}}{3{,}2} = 0{,}3644 = 36{,}44\%$ οπότε το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Έστω $y_i = x_i + \alpha$ οι τιμές του νέου δείγματος που θα προκύψει αν προσθέσουμε σε όλες τις παρατηρήσεις τον σταθερό αριθμό α.

Τότε: $s_y = s = \sqrt{1{,}36}$ και $\bar{y} = \bar{x} + \alpha = 3{,}2 + \alpha$

Πρέπει: $CV_y \le 0{,}1 \Leftrightarrow \dfrac{1{,}17}{|3{,}2+\alpha|} \le 0{,}1 \Leftrightarrow |3{,}2+\alpha| \ge 11{,}7$

$\alpha \ge 8{,}5$ ή $\alpha \le -14{,}9$.

Άρα ο ελάχιστος θετικός ακέραιος που πρέπει να προσθέσουμε για να γίνει το δείγμα ομοιογενές είναι 9.