Μαθηματικά για τη Β΄ τάξη του Λυκείου

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

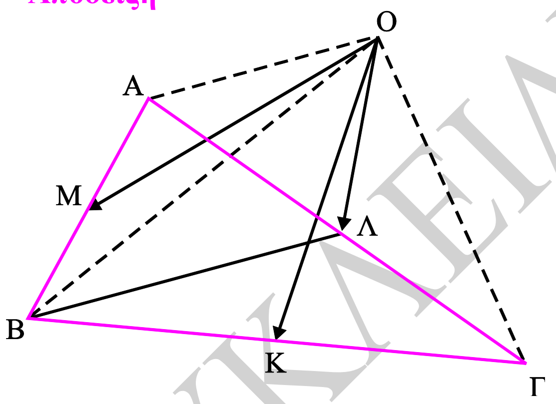
Κώστας Βακαλόπουλος – Ανδρέας Τσαγγάρης

Στο άρθρο που ακολουθεί καταγράφουμε μια σειρά από επιλεγμένες ασκήσεις από το κεφάλαιο των διανυσμάτων. Πολλές απ' αυτές είναι λυμένες με περισσότερους από έναν τρόπο ενώ σε ορισμένες παραθέτονται και σχετικές μεθοδολογίες.

Άσκηση 1η

Αν Κ, Λ, Μ είναι μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντιστοίχως, τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι για οποιοδήποτε σημείο Ο ισχύει: $\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ}=\overrightarrow{ΟΚ}+\overrightarrow{ΟΛ}+\overrightarrow{ΟΜ}$

Απόδειξη



Παρατηρούμε ότι τα διανύσματα του δεύτερου μέλους της ισότητας που θέλουμε να αποδείξουμε είναι διανυσματικές ακτίνες που αντιστοιχούν στα μέσα των πλευρών του τριγώνου, οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τις αντίστοιχες ισότητες. Έτσι έχουμε:

- $\overrightarrow{ΟΜ}=\dfrac{\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}}{2}$ (1)
- $\overrightarrow{ΟΚ}=\dfrac{\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ}}{2}$ (2)
- $\overrightarrow{ΟΛ}=\dfrac{\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΓ}}{2}$ (3)

Από (1), (2), (3) έχουμε:

$$\overrightarrow{ΟΜ}+\overrightarrow{ΟΚ}+\overrightarrow{ΟΛ}=\frac{\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}}{2}+\frac{\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ}}{2}+\frac{\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΓ}}{2}$$
$$=\frac{2\left(\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ}\right)}{2}=\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ}$$

Άσκηση 2η

Αν για τα σημεία Ο, Α, Β, Γ ισχύει: $7\overrightarrow{ΟΑ}-3\overrightarrow{ΟΒ}-4\overrightarrow{ΟΓ}=\vec{0}$, να αποδειχθεί ότι: α) $\overrightarrow{ΑΒ}//\overrightarrow{ΑΓ}$, β) Τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

Απόδειξη

α) Αρκεί να αποδείξουμε ότι υπάρχει πραγματικός λ ώστε: $\overrightarrow{ΑΒ}=λ\overrightarrow{ΑΓ}$ οπότε:

1ος τρόπος

Παίρνουμε την ισότητα που μας δίνεται και προσπαθούμε να αντικαταστήσουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΟΑ}$, $\overrightarrow{ΟΒ}$ και $\overrightarrow{ΟΓ}$ συναρτήσει των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΒ}$, $\overrightarrow{ΑΓ}$. Έτσι έχουμε:

$$7\overrightarrow{ΟΑ}-3\overrightarrow{ΟΒ}-4\overrightarrow{ΟΓ}=\vec{0}\Leftrightarrow$$
$$7\overrightarrow{ΟΑ}-3\left(\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΑΒ}\right)-4\left(\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΑΓ}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow$$
$$7\overrightarrow{ΟΑ}-3\overrightarrow{ΟΑ}-3\overrightarrow{ΑΒ}-4\overrightarrow{ΟΑ}-4\overrightarrow{ΑΓ}=\vec{0}\Leftrightarrow$$
$$-3\overrightarrow{ΑΒ}=4\overrightarrow{ΑΓ}\Leftrightarrow$$
$$\overrightarrow{ΑΒ}=-\frac{4}{3}\overrightarrow{ΑΓ}$$

οπότε τα διανύσματα είναι συγγραμμικά (παράλληλα).

2ος τρόπος

Παίρνουμε σαν σημείο αναφοράς το κοινό άκρο Α των διανυσμάτων και αναλύουμε κάθε διάνυσμα της ισότητας που μας δίνεται σε διαφορά δυο διανυσμάτων. Έτσι έχουμε:

$$7\overrightarrow{ΟΑ}-3\overrightarrow{ΟΒ}-4\overrightarrow{ΟΓ}=\vec{0}\Leftrightarrow$$
$$7\left(\overrightarrow{ΟΑ}-\overrightarrow{ΑΟ}\right)-3\left(\overrightarrow{ΑΒ}-\overrightarrow{ΑΟ}\right)-4\left(\overrightarrow{ΑΓ}+\overrightarrow{ΑΟ}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow$$
$$7\overrightarrow{ΑΟ}-3\overrightarrow{ΑΒ}+3\overrightarrow{ΑΟ}-4\overrightarrow{ΑΓ}+4\overrightarrow{ΑΟ}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$-3\overrightarrow{AB}=4\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AB}=-\dfrac{4}{3}\overrightarrow{A\Gamma}$. Οπότε: $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A\Gamma}$

β) Για να αποδείξουμε ότι τα τρία σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά αρκεί να δείξουμε ότι δυο από τα διανύσματα που σχηματίζουν ανά δυο τα σημεία είναι παράλληλα. Από α) ερώτημα έχουμε $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A\Gamma}$ οπότε τα σημεία Α, Β και Γ είναι συνευθειακά.

Άσκηση 3η

Δίνονται τα μη συγγραμμικά διανύσματα του επιπέδου. Ο είναι τυχαίο σημείο του επιπέδου.

Αν $\overrightarrow{OA}=(x+1)\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\overrightarrow{OB}=2x\vec{\alpha}+(3x-1)\vec{\beta}$, $\overrightarrow{O\Gamma}=-\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$ τότε να υπολογιστεί το $x\in R$ ώστε τα σημεία Α, Β, Γ να είναι συνευθειακά .

Απόδειξη

Έχουμε:

- $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=2x\vec{\alpha}+(3x-1)\vec{\beta}-(x+1)\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=$
$=(x-1)\vec{\alpha}+(3x-4)\vec{\beta}$
- $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA}=-\vec{\alpha}-5\vec{\beta}-(x+1)\vec{\alpha}-3\vec{\beta}=$
$=(-2-x)\vec{\alpha}-8\vec{\beta}$
- Για να είναι τα σημεία Α, Β, Γ συνευθειακά πρέπει και αρκεί τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ να είναι συγγραμμικά, δηλαδή να υπάρχει $\lambda\in R$ ώστε: $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{A\Gamma}$ (1) ή $\overrightarrow{A\Gamma}=\lambda\overrightarrow{AB}$ (2).

Έχουμε:

$(1)\Leftrightarrow(x-1)\vec{\alpha}+(3x-4)\vec{\beta}=\lambda\left[(-2-x)\vec{\alpha}-8\vec{\beta}\right]$

$\Leftrightarrow(x-1)\vec{\alpha}+(3x-4)\vec{\beta}=(-2\lambda-\lambda x)\vec{\alpha}-8\lambda\vec{\beta}$

$\Leftrightarrow\left[x-1+(x+2)\lambda\right]\vec{\alpha}+(8\lambda+3x-4)\vec{\beta}=\vec{O}$

Αν ένας από τους συντελεστές των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δεν είναι μηδέν π.χ. $x-1+(x+2)\lambda\neq0$ τότε

$\vec{\alpha}=-\dfrac{8\lambda+3x-4}{x-1+(x+2)\lambda}\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\alpha}//\vec{\beta}$, που είναι άτοπο. Οπότε πρέπει και αρκεί να υπάρχει $\lambda\in R$ ώστε να ισχύει :

$\left.\begin{array}{l}x-1+(x+2)\lambda=0\\8\lambda+3x-4=0\end{array}\right\}$, δηλαδή

$\left\{\begin{array}{l}\lambda=\dfrac{4-3x}{8}\\x-1+(x+2)\lambda=0\end{array}\right\}(\Sigma)$

Για να έχει λοιπόν το (Σ) λύση ως προς λ πρέπει και αρκεί $x-1+(x+2)\dfrac{4-3x}{8}=0$, δηλαδή x = 0 ή x = 2. Ανάλογα εργαζόμαστε στη σχέση (2)

Άσκηση 4η

Θεωρούμε τα σημεία Α, Β, Γ. Να αποδειχθεί ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ, το διάνυσμα $5\overrightarrow{MA}-8\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

Απόδειξη.

Για να είναι σταθερό το διάνυσμα $5\overrightarrow{MA}-8\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{M\Gamma}$ αρκεί να αποδείξουμε ότι ισούται με ένα αλγεβρικό άθροισμα διανυσμάτων που εξαρτώνται μόνο από τα Α, Β, Γ. Δηλαδή πρέπει να απαλείψουμε το Μ. Επιλέγουμε ως κέντρο αναφοράς ένα από τα σημεία Α, Β, Γ π.χ. το Α και έχουμε:

$5\overrightarrow{MA}-8\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{M\Gamma}=$

$=5\overrightarrow{MA}-8\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\right)+3\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AM}\right)=$

$=-5\overrightarrow{AM}-8\overrightarrow{AB}+8\overrightarrow{AM}+3\overrightarrow{A\Gamma}-2\overrightarrow{AM}=3\overrightarrow{A\Gamma}-8\overrightarrow{AB}$

Το διάνυσμα αυτό είναι σταθερό, γιατί τα σημεία Α, Β, Γ είναι σταθερά.

Άσκηση 5η

Θεωρούμε τα σημεία Α(5,–1), Β(1,1) και Γ(2,3)

α) Να αποδειχθεί ότι τα σημεία Α, Β, Γ είναι κορυφές τριγώνου.

β) Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο.

Απόδειξη.

α) Για να είναι τα σημεία Α, Β, Γ κορυφές τριγώνου αρκεί να αποδείξουμε ότι δεν είναι συνευθειακά. Δηλαδή αρκεί να αποδείξουμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{A\Gamma}$ δεν είναι συγγραμμικά. Έχουμε:

$\overrightarrow{AB}=(1-5,\,1+1)=(-4,\,2)$

$\overrightarrow{A\Gamma}=(2-5,\,3+1)=(-3,\,4)$

Οπότε:

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{A\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-4 & 2\\ -3 & 4\end{vmatrix}=-16+6=-10\neq 0$$

Άρα: $\overrightarrow{AB}\nparallel\overrightarrow{A\Gamma}$ οπότε τα σημεία Α, Β, Γ δεν είναι συνευθειακά και είναι κορυφές τριγώνου.

β) Έχουμε:

$$\left.\begin{array}{l}(AB)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(-4)^2+2^2}=\sqrt{20}\\ (A\Gamma)=\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{9+16}=5\\ (B\Gamma)=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\sqrt{1+2^2}=\sqrt{5}\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}(AB)^2=20\\ (A\Gamma)^2=25\\ (B\Gamma)^2=5\end{array}\right.$$

Οπότε: $(A\Gamma)^2=(AB)^2+(B\Gamma)^2$ Δηλαδή το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία τη Β.

Άσκηση 6η

Θεωρούμε τα σημεία Α(6,–1), Β(4,3), Γ(1,2) και Δ(2μ, μ+1). Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός μ ώστε να είναι κορυφές τραπεζίου.

Λύση

Για να είναι ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ τραπέζιο αρκεί να έχει δυο πλευρές παράλληλες και τις άλλες δυο μη παράλληλες. Γι΄ αυτό διακρίνουμε δυο περιπτώσεις:

α) Με βάσεις ΑΒ, ΓΔ. Πρέπει και αρκεί: $\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{A\Delta}\nparallel\overrightarrow{B\Gamma}$.

Έχουμε:

- $\overrightarrow{AB}=(4-6,\,3+1)=(-2,4)$
- $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=(1-2\mu,\,2-\mu-1)=(1-2\mu,1-\mu)$

$$\overrightarrow{AB}\,/\!/\,\overrightarrow{\Delta\Gamma}\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 1-2\mu & 1-\mu\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -2+2\mu-4+8\mu=0\Leftrightarrow -10\mu-6=0\Leftrightarrow \mu=\frac{3}{5}$$

Οπότε για $\mu=\dfrac{3}{5}$ είναι $\Delta\left(\dfrac{6}{5},\dfrac{8}{5}\right)$. Έστι έχουμε:

- $\overrightarrow{A\Delta}=\left(\dfrac{6}{5}-6,\,\dfrac{8}{5}+1\right)=\left(-\dfrac{24}{5},\,\dfrac{13}{5}\right)$
- $\overrightarrow{B\Gamma}=(1-4,\,2-3)=(-3,\,-1)$

Και

$$\det\left(\overrightarrow{A\Delta},\overrightarrow{B\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-\dfrac{24}{5} & \dfrac{13}{5}\\ -3 & -1\end{vmatrix}=\frac{63}{5}\neq 0\Rightarrow\overrightarrow{A\Delta}\nparallel\overrightarrow{B\Gamma}$$

β) Με βάσεις ΑΔ, ΒΓ. Πρέπει και αρκεί: $\overrightarrow{A\Delta}\,/\!/\,\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{AB}\nparallel\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

Έχουμε $A\Delta=(2\mu-6,\,\mu+2)$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=(-3,\,-1)$

$$\overrightarrow{A\Delta}\,/\!/\,\overrightarrow{B\Gamma}\Leftrightarrow\det\left(\overrightarrow{A\Delta},\,\overrightarrow{B\Gamma}\right)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}2\mu-6 & \mu+2\\ -3 & -1\end{vmatrix}=0$$

$$\Leftrightarrow -2\mu+6+3\mu+6=0\Leftrightarrow\mu+12=0\Leftrightarrow\mu=-12$$

Για $\mu=-12$ είναι $\Delta(-24,\,-11)$ οπότε:

$\overrightarrow{AB}=(-2,\,4),\ \overrightarrow{\Delta\Gamma}=(1+24,\,2+11)=(25,13)$

Και

$$\det\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right)=\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 25 & 13\end{vmatrix}=-26-100=$$

$$=-126\neq 0\Rightarrow\overrightarrow{AB}\nparallel\overrightarrow{B\Gamma}$$

Άσκηση 7η

Αν για τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ ισχύει: $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=2\left|\vec{\alpha}\right|$ και $\left|\vec{\beta}\right|=3\left|\vec{\alpha}\right|$ να δείξετε ότι: $\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$.

Λύση

Με αφορμή την άσκηση 15/Α΄Ομάδας σελ. του σχολικού αναφέρουμε τις παρακάτω ισοδυναμίες.

- $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}$ (1)
- $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$ (2)

Η απόδειξή τους είναι απλή.

Για τη (2) π.χ. έχουμε: $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right|\Leftrightarrow$

$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|^2=\left|\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right|^2\Leftrightarrow$

$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2=\left(\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right)^2\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^{\,2}+2\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=\left|\vec{\alpha}\right|^2-2\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|+\left|\vec{\beta}\right|^2\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}\cdot\vec{\beta}=-\left|\vec{\alpha}\right|\cdot\left|\vec{\beta}\right|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$

Λύση της άσκησης

Έχουμε: $\left|\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right|=\left|\left|\vec{\alpha}\right|-3\left|\vec{\alpha}\right|\right|=\left|-2\left|\vec{\alpha}\right|\right|=2\left|\vec{\alpha}\right|$ $=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|$. Άρα $\vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}$

Άσκηση 8η

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}=2010\cdot\vec{\gamma}$, $\vec{\beta}=2011\cdot\vec{\delta}$ ($\vec{\alpha},\vec{\beta}$ μη συγγραμμικά) με $|\vec{\gamma}|=|\vec{\delta}|=1$. Να δειχθεί ότι το διάνυσμα $\vec{x}=\vec{\gamma}+\vec{\delta}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Λύση

Έστω σημείο Ο και Γ, Δ, Α, Β ώστε:

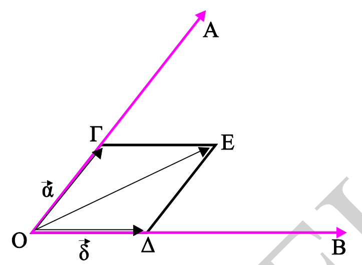
$\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\gamma}$, $\overrightarrow{O\Delta}=\vec{\delta}$, $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$.

Ισχύει:

$\vec{\alpha}=2010\cdot\vec{\gamma}\Rightarrow\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\gamma}$ και Ο,Γ,Α συνευθειακά

$\vec{\beta}=2011\cdot\vec{\delta}\Rightarrow\vec{\beta}\nearrow\nearrow\vec{\delta}$ και Ο,Δ,Β συνευθειακά.

Άρα οι γωνίες $\left(\widehat{\vec{\gamma},\vec{\delta}}\right)$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ ταυτίζονται. Αν Ε η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου ΓΟΔΕ θα ισχύει: $\overrightarrow{OE}=\vec{\gamma}+\vec{\delta}$.



Όμως $|\vec{\gamma}|=|\vec{\delta}|$, οπότε το τετράπλευρο ΓΟΔΕ είναι ρόμβος. **Άρα:** το διάνυσμα $\overrightarrow{OE}$ (διαγώνιος ρόμβου) διχοτομεί τη γωνία του $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$ άρα και την $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Με τον ίδιο τρόπο με τη λύση της άσκησης 8 μπορούμε να αποδείξουμε τις ασκήσεις: 9 της Α΄ ομάδας και 3 της Β΄ ομάδας του σχολικού βιβλίου σελ.

1) Να δείξετε ότι αν $\vec{u}=|\vec{\alpha}|\vec{\beta}+|\vec{\beta}|\vec{\alpha}$ και $\vec{v}=|\vec{\alpha}|\vec{\beta}-|\vec{\beta}|\vec{\alpha}$ τότε $\vec{u}\perp\vec{v}$:

Υπόδειξη: Αν θεωρήσουμε σημείο Ο και $\overrightarrow{OA}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ και Γ η τέταρτη κορυφή του παραλληλογράμμου ΒΟΑΓ τότε τα διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ως διαγώνιες του ρόμβου $\left(|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|\right)$ είναι κάθετα.

2) Να δείξετε ότι ο φορέας του $\vec{u}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}+|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ διχοτομεί τη γωνία των διανυσμάτων $\vec{u}$ και $\vec{v}$ και ο φορέας του $\vec{v}=|\vec{\beta}|\vec{\alpha}-|\vec{\alpha}|\vec{\beta}$ διχοτομεί την παραπληρωματική γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

Υπόδειξη:

Εργαζόμενοι όπως πριν έχουμε ότι οι φορείς των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ (διαγώνιοι του ρόμβου) διχοτομούν τις γωνίες του.

Άσκηση 9η (Για λύση)

Να αποδειχθούν οι ισοδυναμίες:

i) $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|\Leftrightarrow\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$

ii) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})\perp(\vec{\alpha}-\vec{\beta})\Leftrightarrow|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|$

Ποιες γεωμετρικές προτάσεις εκφράζουν οι παραπάνω σχέσεις;

Άσκηση 10η

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $AB=\sqrt{3}$, $B\Gamma=\sqrt{2}$ και $\Gamma A=\sqrt{5}$. Δείξτε ότι:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{AB}=-5$$

Λύση

Ισχύει: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{0}$ (1)

$(1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=-\overrightarrow{\Gamma A}\Rightarrow\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=$

$=-\overrightarrow{\Gamma A}^2=-|\overrightarrow{\Gamma A}|^2=-5$

$(1)\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma A}=-\overrightarrow{B\Gamma}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=$

$=-\overrightarrow{B\Gamma}^2=-|\overrightarrow{B\Gamma}|^2=-2$

$(1)\Rightarrow\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}=-\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=$

$=-\overrightarrow{AB}^2=-|\overrightarrow{AB}|^2=-3$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε:

$2\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=-5-2-3\Rightarrow$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}=-5$

Β΄ τρόπος

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}=\vec{O}\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma A}\right)^2=0\Rightarrow$

$\overrightarrow{AB}^2+\overrightarrow{B\Gamma}^2+\overrightarrow{\Gamma A}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+2\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}+2\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{AB}=\vec{O}\Rightarrow$

$2\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{AB}\right)=-\left|\overrightarrow{AB}\right|^2-\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|^2-\left|\overrightarrow{\Gamma A}\right|^2\Rightarrow$

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{B\Gamma}\cdot\overrightarrow{\Gamma A}+\overrightarrow{\Gamma A}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(-10)=-5$.

Άσκηση 11η

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|\overrightarrow{B\Gamma}\right|=\left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right|=\left|\overrightarrow{\Delta A}\right|$. Δείξτε ότι αν $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$ τότε $\overrightarrow{\Gamma\Delta}\perp\overrightarrow{\Delta A}$ και αντιστρόφως.

Λύση

Ισχύει: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}=\vec{O}$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=-\left(\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}\right)$

$\Rightarrow\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}\right)^2=\left[-\left(\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta A}\right)\right]^2$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{B\Gamma}^2=\overrightarrow{\Gamma\Delta}+2\overrightarrow{\Gamma\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{\Delta A}^2$

$\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta A}$

Άρα αν $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{B\Gamma}$ τότε $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}=0$ οπότε και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}\cdot\overrightarrow{\Delta A}=0$ άρα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}\perp\overrightarrow{\Delta A}$ και αντιστρόφως.

Άσκηση 12η

Έστω διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ με $|\vec{\alpha}|=|\vec{\beta}|=|\vec{\gamma}|=1$ και $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\gamma}}\right)=\frac{\pi}{3}$ και $\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\gamma}}\right)=\frac{\pi}{6}$. Να λυθεί (ως προς x) η εξίσωση: $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right|=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+x\cdot\vec{\gamma}\right|$ $(x\in\mathbb{R})$.

Λύση

Όμως $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right|=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+x\cdot\vec{\gamma}\right|\Leftrightarrow$

$\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right|^2=\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+x\cdot\vec{\gamma}\right|^2\Leftrightarrow$

$\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}\right)^2=\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+x\cdot\vec{\gamma}\right)^2\Leftrightarrow$

$\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+\vec{\gamma}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}-2\vec{\beta}\vec{\gamma}-2\vec{\alpha}\vec{\gamma}=$

$\vec{\alpha}^2+\vec{\beta}^2+\left(x\vec{\gamma}\right)^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+2x\vec{\alpha}\vec{\gamma}+2x\vec{\beta}\vec{\gamma}\Leftrightarrow$

$\vec{\gamma}^2-2\vec{\gamma}\vec{\beta}^2-2\vec{\alpha}\vec{\gamma}=x^2\cdot\vec{\gamma}^2+2x\vec{\alpha}\vec{\gamma}+2x\vec{\beta}\vec{\gamma}\Leftrightarrow$

$$x^2+2\left(\vec{\alpha}\vec{\gamma}+\vec{\beta}\vec{\gamma}\right)x+2\left(\vec{\alpha}\vec{\gamma}+\vec{\beta}\vec{\gamma}\right)-1=0 \qquad \textbf{(1)}$$

Όμως: $\vec{\alpha}\vec{\gamma}=1\cdot1\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$ και

$\vec{\beta}\vec{\gamma}=1\cdot1\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Έτσι η $(1)\Leftrightarrow x^2+\cancel{2}\frac{1+\sqrt{3}}{\cancel{2}}x+\cancel{2}\frac{1+\sqrt{3}}{\cancel{2}}-1=0$

$\Leftrightarrow x^2+\left(1+\sqrt{3}\right)x+\sqrt{3}=0$

$\Leftrightarrow x=1$ ή $x=\sqrt{3}$

Άσκηση 13η

Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $\vec{x}$ με $|\vec{\alpha}|=\sqrt{6}$ για τα οποία ισχύει: $\left(2\vec{\alpha}\vec{x}-3\right)\vec{x}=\vec{x}-\vec{\alpha}$ (1)

α) Να βρεθεί το $\vec{x}$

β) Να δείξετε ότι αν $\vec{x}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ τότε:

$\left|\left|\vec{\beta}\right|-\sqrt{6}\right|\leq\frac{1}{\sqrt{6}}$

Λύση

α) $\left(2\vec{\alpha}\vec{x}-3\right)\vec{x}=\vec{x}-\vec{\alpha}\Rightarrow\left(2\vec{\alpha}\vec{x}-3\right)\vec{\alpha}\vec{x}=\vec{\alpha}\vec{x}-\vec{\alpha}^2$

$\Leftrightarrow2\left(\vec{\alpha}\vec{x}\right)^2-3\vec{\alpha}\vec{x}=\vec{\alpha}\vec{x}-6$

$\Leftrightarrow2\left(\vec{\alpha}\vec{x}\right)^2-4\vec{\alpha}\vec{x}+6=0\Leftrightarrow\left(\vec{\alpha}\vec{x}\right)^2-2\vec{\alpha}\vec{x}+3=0$

Θέτουμε: $\omega=\vec{\alpha}\vec{x}$ και λύνουμε την εξίσωση:

$\omega^2-2\omega+3=0\Leftrightarrow\omega=-1$ ή $\omega=3$

Άρα: $\vec{\alpha}\vec{x}=-1$ ή $\vec{\alpha}\vec{x}=3$

- Αν $\vec{\alpha}\vec{x}=-1$ τότε η (1) γίνεται:

$\left[2(-1)-3\right]\vec{x}=\vec{x}-\vec{\alpha}\Leftrightarrow-6\vec{x}=-\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{x}=\frac{1}{6}\vec{\alpha}$

- Αν $\vec{\alpha}\vec{x}=3$ τότε η (1) γίνεται:

$\left(2\cdot3-3\right)\vec{x}=\vec{x}-\vec{\alpha}\Leftrightarrow2\vec{x}=-\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{x}=-\frac{1}{2}\vec{\alpha}$

Σημείωση: Επειδή στην παραπάνω λύση έχουμε χρησιμοποιήσει και συνεπαγωγές πρέπει να επαληθεύσουμε τις λύσεις που βρήκαμε στην αρχική εξίσωση. Πράγματι:

Για $\vec{x}=-\frac{1}{2}\vec{\alpha}$ έχουμε:

$\left[2\vec{\alpha}\left(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}\right)-3\right]\left(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}\right)=\left(-\vec{\alpha}^2-3\right)\left(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}\right)=$

$(-6-3)\left(-\frac{1}{2}\vec{\alpha}\right)=\boxed{\frac{9}{2}\vec{\alpha}}$ ενώ $-\frac{1}{2}\vec{\alpha}-\vec{\alpha}=\boxed{-\frac{3}{2}\vec{\alpha}}$.

ΑΡΑ: η λύση $\vec{x}=-\frac{1}{2}\vec{\alpha}$ απορρίπτεται.

Για $\vec{x}=\frac{1}{6}\vec{\alpha}$ έχουμε:

$\left[2\vec{\alpha}\left(\frac{1}{6}\vec{\alpha}\right)-3\right]\left(\frac{1}{6}\vec{\alpha}\right)=\left(\frac{1}{3}\vec{\alpha}^2-3\right)\frac{1}{6}\vec{\alpha}=\boxed{-\frac{5}{6}\vec{\alpha}}$ ενώ

$\frac{1}{6}\vec{\alpha}-\vec{\alpha}=\boxed{-\frac{5}{6}\vec{\alpha}}$

ΑΡΑ η λύση $\vec{x}=\frac{1}{6}\vec{\alpha}$ είναι δεκτή.

β) $\vec{x}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\beta}=\vec{x}-\vec{\alpha}\Rightarrow|\vec{\beta}|=|\vec{x}-\vec{\alpha}|$

Όμως: $|\vec{x}-\vec{\alpha}|=\left|\vec{x}+\left(-\vec{\alpha}\right)\right|$ οπότε:

$\left||\vec{x}|-|-\vec{\alpha}|\right|\le|\vec{x}-\vec{\alpha}|\le|\vec{x}|+|-\vec{\alpha}|$ (τριγωνική ανισότητα) επομένως:

$$\left|\frac{1}{6}|\vec{\alpha}|-|\vec{\alpha}|\right|\le|\vec{\beta}|\le\frac{1}{6}|\vec{\alpha}|+|-\vec{\alpha}|\Rightarrow$$

$$\left|\frac{1}{6}\sqrt{6}-\sqrt{6}\right|\le|\vec{\beta}|\le\frac{1}{6}\sqrt{6}+\sqrt{6}\Rightarrow$$

$$\sqrt{6}-\frac{1}{6}\sqrt{6}\le|\vec{\beta}|\le\frac{1}{6}\sqrt{6}+\sqrt{6}\Rightarrow$$

$$\frac{1}{6}\sqrt{6}\le|\vec{\beta}|-\sqrt{6}\le\frac{1}{6}\sqrt{6}\Rightarrow$$

$$\left||\vec{\beta}|-\sqrt{6}\right|\le\frac{1}{6}\sqrt{6}.$$

Άσκηση 13η

Δίνονται τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ του επιπέδου για τα οποία ισχύει: $\left[\vec{\alpha}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\right]^2=\vec{\alpha}^2\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2$. Να δείξετε ότι τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

Λύση

(Θυμηθείτε ότι δεν ισχύει: $\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2$ για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$)!

Έχουμε: $\left[\vec{\alpha}\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)\right]^2=\vec{\alpha}^2\left(\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right)^2\Rightarrow$

$$\left(\vec{\alpha}^2+\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2\left(\vec{\alpha}^2+2\vec{\alpha}\vec{\beta}+\vec{\beta}^2\right)\Rightarrow$$

$$\vec{\alpha}^4+2\vec{\alpha}^2\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)+\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^4+2\vec{\alpha}^2\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)+\vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2\Rightarrow$$

$$\left(\vec{\alpha}\vec{\beta}\right)^2=\vec{\alpha}^2\vec{\beta}^2\Rightarrow$$

$$\left(|\vec{\alpha}||\vec{\beta}|\,\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)\right)^2=|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\Rightarrow$$

$$|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\,\text{συν}^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=|\vec{\alpha}|^2|\vec{\beta}|^2\Rightarrow$$

$$\text{συν}^2\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=1\Rightarrow\text{συν}\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=1\ \text{ή}\ -1\Rightarrow$$

$$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=0\ \text{ή}\ \left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\pi$$

$$\Rightarrow\vec{\alpha}\nearrow\nearrow\vec{\beta}\ \text{ή}\ \vec{\alpha}\nearrow\swarrow\vec{\beta}\Rightarrow\vec{\alpha}//\vec{\beta}$$