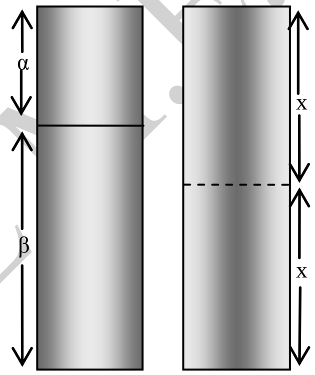
Καλά, πόσοι μέσοι υπάρχουν;

Κώστα Βακαλόπουλου

(Μαθηματικού – Msc Statistics)

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Στην αρχαιότητα βάλθηκαν να αντικαταστήσουν τις κολώνες ενός ναού που ήσαν φτιαγμένες με δύο πέτρες, άνισου ύψους, με δυο πέτρες ίσου ύψους. Αν τα αρχικά ύψη ήταν α και β μέτρα, πόσο πρέπει να είναι το ύψος κάθε μιας από τις ίσες πέτρες;



Λύση

Αν x το ύψος κάθε μιας από τις πέτρες που θα χρησιμοποιήσουμε,

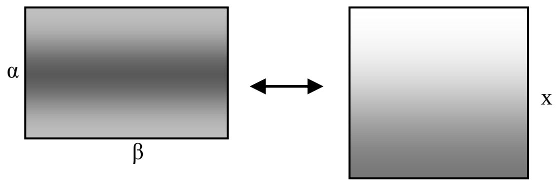
τότε θα ισχύει: $2x = \alpha + \beta \Leftrightarrow \boxed{x = \dfrac{\alpha+\beta}{2}}$. Ο αριθμός αυτός λέγεται

αριθμητικός μέσος (A_M) των α και β.

Εφαρμογή: Αν $\alpha = 60$ και $\beta = 80$ τότε: $x = \dfrac{60+80}{2} = 70$

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Ένας κτηματίας θέλει να ανταλλάξει ένα χωράφι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις α και β μέτρα με ένα άλλο σχήματος τετραγώνου αλλά φυσικά με ίδιο εμβαδόν. Πόσα μέτρα πρέπει να είναι η πλευρά του τετραγωνικού χωραφιού ώστε η ανταλλαγή να είναι δίκαιη;



Λύση

Αν η πλευρά του τετραγωνικού χωραφιού είναι x μέτρα τότε θα ισχύει: $x^2 = \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \boxed{x = \sqrt{\alpha \cdot \beta}}$.

Ο αριθμός αυτός λέγεται **γεωμετρικός μέσος** (A_G) των αριθμών α και β.

Εφαρμογή: Αν $\alpha = 60$ και $\beta = 80$ τότε: $x = \sqrt{60 \cdot 80} = \sqrt{4800} \simeq 69{,}28$.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Ένα σχολικό λεωφορείο διανύει μια απόσταση με σταθερή ταχύτητα $\alpha \frac{\text{km}}{\text{h}}$ σε t_1 ώρες.

Την άλλη μέρα επιστρέφει διανύοντας την ίδια απόσταση με σταθερή ταχύτητα $\beta \frac{\text{km}}{\text{h}}$ σε t_2 ώρες.

Μπορείτε να βρείτε με ποια σταθερή ταχύτητα θα μπορούσε να πάει και να έρθει σε χρόνο όσο το άθροισμα των χρόνων που έκανε τις δύο προηγούμενες μέρες;

Λύση

Έστω S η απόσταση που διανύει το κινητό κάθε φορά.

Η εξίσωση της κίνησης της πρώτης μέρας θα είναι: $S = \alpha \cdot t_1 \Leftrightarrow t_1 = \frac{S}{\alpha}$.

Η εξίσωση της κίνησης της δεύτερης μέρας θα είναι: $S = \beta \cdot t_2 \Leftrightarrow t_2 = \frac{S}{\beta}$.

Αν x η ταχύτητα που ζητάμε θα ισχύει: $2S = x \cdot (t_1 + t_2) \Leftrightarrow t_1 + t_2 = \frac{2S}{x}$

Άρα: $\frac{S}{\alpha} + \frac{S}{\beta} = \frac{2 \cdot S}{x} \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{2}{x} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}}}$ ή $x = \frac{2 \cdot \alpha \cdot \beta}{\alpha + \beta}$.

Ο αριθμός αυτός λέγεται **αρμονικός μέσος** (A_H) των αριθμών α και β.

Εφαρμογή: Αν $\alpha = 60$ και $\beta = 80$ τότε: $x = \frac{2}{\frac{1}{60} + \frac{1}{80}} = \frac{2 \cdot 60 \cdot 80}{60 + 80} \simeq 68{,}57$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:

Μεταξύ του αριθμητικού, του γεωμετρικού και του αρμονικού μέσου δύο θετικών αριθμών ισχύει η παρακάτω ανισοτική σχέση: $A_H \leq A_G \leq A_M$.

(Παρατηρείστε στις εφαρμογές ότι: $68{,}57 \leq 69{,}27 \leq 70$)

Πράγματι, θα αποδείξουμε ότι: $\frac{2}{\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}} \leq \sqrt{\alpha \cdot \beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{2} \Leftrightarrow \boxed{\frac{2 \cdot \alpha \cdot \beta}{\alpha + \beta} \leq \sqrt{\alpha \cdot \beta} \leq \frac{\alpha + \beta}{2}}$ (α, β >0)

- $\boxed{\frac{2 \cdot \alpha \cdot \beta}{\alpha + \beta} \leq \sqrt{\alpha \cdot \beta}} \Leftrightarrow \left(\frac{2 \cdot \alpha \cdot \beta}{\alpha + \beta}\right)^2 \leq \left(\sqrt{\alpha \cdot \beta}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot (\alpha \cdot \beta)^2}{(\alpha + \beta)^2} \leq \alpha \cdot \beta \Leftrightarrow \frac{4 \cdot \alpha \cdot \beta}{(\alpha + \beta)^2} \leq 1 \Leftrightarrow 4 \cdot \alpha \cdot \beta \leq (\alpha + \beta)^2$

$$\Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2 \geq 4\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha^2+2\cdot\alpha\cdot\beta+\beta^2-4\cdot\alpha\cdot\beta \geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$$

- $\boxed{\sqrt{\alpha\cdot\beta} \leq \frac{\alpha+\beta}{2}} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha\cdot\beta}\right)^2 \leq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \alpha\beta \leq \frac{(\alpha+\beta)^2}{4} \Leftrightarrow 4\cdot\alpha\cdot\beta \leq (\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2 \geq 0$

Σημείωση:

Η παραπάνω ανισοτική σχέση ζητείται να αποδειχθεί στην άσκηση 4ii στη σελίδα 51 στο σχολικό βιβλίο της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου. Ως γνωστό είναι εφαρμογή (για δύο θετικούς αριθμούς) της ανισότητας Cauchy-Schwartz που ακολουθεί:

Γενικά:

Αν $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\nu$ θετικοί αριθμοί (ν θετικός ακέραιος) ονομάζουμε:

- Αριθμητικό μέσο (A_M) τον αριθμό: $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}$,
- Γεωμετρικό μέσο (A_G) τον αριθμό: $\sqrt[\nu]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu}$,
- Αρμονικό μέσο (A_H) τον αριθμό: $\frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_\nu}}$.

Μεταξύ των παραπάνω αριθμών ισχύει: $A_H \leq A_G \leq A_M$ δηλαδή:

$$\boxed{\frac{\nu}{\frac{1}{\alpha_1}+\frac{1}{\alpha_2}+\ldots+\frac{1}{\alpha_\nu}} \leq \sqrt[\nu]{\alpha_1\cdot\alpha_2\cdot\ldots\cdot\alpha_\nu} \leq \frac{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_\nu}{\nu}}$$

ΑΞΙΟΛΟΓΗ ΕΠΙΣΗΜΑΝΣΗ

Στη Στατιστική, **μέση τιμή** των στατιστικών δεδομένων (παρατηρήσεων) $t_i,\ \ i=1,2,3,\ldots,\nu$ μιας μεταβλητής Χ ονομάζουμε τον **αριθμητικό μέσο** αυτών: $\bar{x}=\frac{t_1+t_2+\ldots+t_\nu}{\nu}$.

Αν μάλιστα οι τιμές $x_i,\ \ i=1,2,3,\ldots,\kappa$ της μεταβλητής Χ έχουν συχνότητες εμφάνισης: $\nu_i,\ \ i=1,2,3,\ldots,\kappa$ αντίστοιχα, ο παραπάνω τύπος για τη μέση τιμή γίνεται:

$\bar{x}=\frac{x_1\cdot\nu_1+x_2\cdot\nu_2+\ldots+x_\kappa\cdot\nu_\kappa}{\nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_\kappa}$ που πάλι εκφράζει **αριθμητικό μέσο**.

Ο σταθμικός μέσος για την περίπτωση που τα στατιστικά δεδομένα έχουν συντελεστές βαρύτητας: $w_i,\ \ i=1,2,3,\ldots,\nu$ αντίστοιχα δίνεται από το τύπο: $\bar{x}=\frac{t_1\cdot w_1+t_2\cdot w_2+\ldots+t_\nu\cdot w_\nu}{w_1+w_2+\ldots+w_\nu}$

που πάλι εκφράζει **αριθμητικό μέσο**.