ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Α΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΣΗΜΟ ΤΡΙΩΝΥΜΟΥ ή ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2^ου^ ΒΑΘΜΟΥ

των Παναγιώτη Χριστόπουλου – Κώστα Βακαλόπουλου

Με τη φράση «πρόσημο τριωνύμου» δηλώνουμε τη μέθοδο με την οποία μπορούμε να γνωρίζουμε ποιο πρόσημο θα έχουν οι τιμές της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ για όλες τις τιμές της μεταβλητής x.

Η επίλυση ανισώσεων 2^ου^ βαθμού ανάγεται στην εύρεση του προσήμου ενός τριωνύμου. Έτσι η λύση της ανίσωσης $x^2-5x+6>0$ σημαίνει την εύρεση των πραγματικών τιμών του x για τις οποίες η συνάρτηση: $f(x)=x^2-5x+6$ (ΤΡΙΩΝΥΜΟ με $\alpha=1$, $\beta=-5$, $\gamma=6$) έχει τιμές με πρόσημο θετικό και όπως θα δούμε παρακάτω, ομόσημες του συντελεστή $\alpha=1$ του x^2. Όμοια αντιμετώπιση έχει και η επίλυση της ανίσωσης: $4>x^2$, αφού αυτή μετατρέπεται ισοδύναμα στην $4-x^2>0 \Leftrightarrow -x^2+4>0$ και η επίλυσή της ανάγεται στην εύρεση των τιμών του x για τις οποίες η συνάρτηση $g(x)=-x^2+4$ (ΤΡΙΩΝΥΜΟ με $\alpha=-1$, $\beta=0$, $\gamma=4$) έχει τιμές με πρόσημο θετικό ή ετερόσημες του συντελεστή $\alpha=-1$ του x^2.

Για την αντιμετώπιση του παραπάνω θέματος διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

1^η^ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

(ΤΡΙΩΝΥΜΑ ΜΕ ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ ΑΡΝΗΤΙΚΗ)

Δίνονται οι συναρτήσεις: α) $f(x)=x^2-x+1$ β) $g(x)=-x^2+2x-5$.

Οι συναρτήσεις αυτές είναι της μορφής: $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ (ΤΡΙΩΝΥΜΑ). Έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και διακρίνουσα Δ ($\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$) **αρνητική** ($\Delta_f=-3$, $\Delta_g=-16$). Η πρώτη έχει συντελεστή στο x^2, $\alpha=1>0$ ενώ η δεύτερη $\alpha=-1<0$.

Δίνοντας διάφορες τιμές στη μεταβλητή x έχουμε:

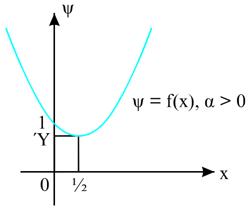
α) $f(-2)=7>0$, $f(-1)=3>0$, $f(0)=1>0$, $f(1)=1>0$, $f(2)=3>0$, $f(3)=7>0$.

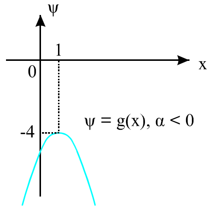
β) $g(-5)=-40<0$, $g(-1)=-8<0$, $g(0)=-5<0$, $g(1)=-4<0$, $g(2)=-5<0$, $g(5)=-20<0$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f έχει θετικές τιμές δηλ. **ομόσημες** του $\alpha=1>0$ ενώ η g έχει αρνητικές τιμές, επίσης ομόσημες του $\alpha=-1<0$.

Συμβαίνει αυτό άραγε για κάθε τιμή της μεταβλητής x;

Παρατηρώντας τη γραφική παράσταση των παραπάνω συναρτήσεων βλέπουμε ότι πράγματι συμβαίνει αφού **για κάθε πραγματική τιμή του x** η συνάρτηση (το τριώνυμο) έχει τιμές **ομόσημες του α.**





Τα παραπάνω συμπεράσματα παρουσιάζονται σχηματικά στον πίνακα:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$ ή $g(x)$	ομόσημο του α

$2^{η}$ ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

(ΤΡΙΩΝΥΜΑ ΜΕ ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ ΜΗΔΕΝ)

Δίνονται τα τριώνυμα: α) $f(x)=3x^2-6x+3$

β) $g(x)=-x^2+6x-9$

Οι συναρτήσεις αυτές είναι επίσης της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ (ΤΡΙΩΝΥΜΟ). Έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και διακρίνουσα Δ μηδέν ($\Delta_f=\Delta_g=0$). Η πρώτη έχει συντελεστή στο x^2, $\alpha=3>0$ ενώ η δεύτερη $\alpha=-1<0$.

Στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις παίρνουν τη μορφή $\alpha\left(x+\frac{\beta}{2\alpha}\right)^2$ ή όπως προκύπτει από γνωστή ταυτότητα παίρνει μορφή **τελείου τετραγώνου.** π.χ. $f(x)=3\left(x+\frac{-6}{2\cdot 3}\right)^2=3(x-1)^2$ ή

$$f(x)=3\left(x^2-2x+1\right)=3(x-1)^2 \text{ ενώ}$$

$$g(x)=-\left(x+\frac{-6}{2\cdot 1}\right)^2=-(x-3)^2 \text{ ή}$$

$$g(x)=-\left(x^2-6x+9\right)=-(x-3)^2.$$

Δίνοντας διάφορες τιμές στη μεταβλητή x έχουμε:

α) $f(-2)=27>0$, $f(-1)=12>0$, $f(0)=3>0$, $f(4)=27>0$, ενώ $f(1)=0$.

β) $g(-9)=-64<0$, $g(-2)=-25<0$, $g(0)=-9<0$, $g(9)=-4<0$ ενώ $g(3)=0$.

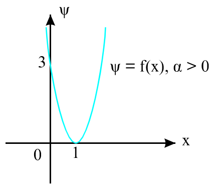
Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f έχει **θετικές τιμές** δηλαδή **ομόσημες του α=3>0** εκτός από την τιμή 1 για την οποία μηδενίζεται ενώ η συνάρτηση g έχει **αρνητικές τιμές** επίσης **ομόσημες** του $\alpha=-1<0$ εκτός από την τιμή 3 για την οποία μηδενίζεται.

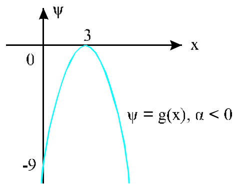
Από τη μορφή που παίρνουν οι συναρτήσεις: $f(x)=3(x-1)^2\geq 0$ και $g(x)=-(x-3)^2\leq 0$ είναι φανερό ότι για κάθε πραγματική τιμή του x οι τιμές τους είναι:

για την f, θετικές (ομόσημες του $\alpha=3>0$) εκτός από την τιμή 1, όπου $f(1)=0$ και

για την g, αρνητικές (ομόσημες του $\alpha=-1<0$) εκτός από την τιμή 3, όπου $f(3)=0$.

Τα συμπεράσματα αυτά επιβεβαιώνονται και από τις γραφικές παραστάσεις των δύο αυτών συναρτήσεων.





και παρουσιάζονται σχηματικά στον πίνακα:

x	$-\infty$	$-\frac{\beta}{2\alpha}(1 \text{ ή } 3)$	$+\infty$
$f(x)$ ή $g(x)$	ομόσημο του α	ο	ομόσημο του α

3η ΠΕΡΙΠΤΩΣΗ

(ΤΡΙΩΝΥΜΑ ΜΕ ΔΙΑΚΡΙΝΟΥΣΑ ΘΕΤΙΚΗ)

Δίνονται τα τριώνυμα: α) $f(x)=x^2-7x+10$ β) $g(x)=-2x^2+7x-3$.

Οι συναρτήσεις αυτές είναι επίσης της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ (ΤΡΙΩΝΥΜΑ).

Έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και διακρίνουσα Δ θετική ($\Delta_f=9$, $\Delta_g=25$). Η πρώτη έχει συντελεστή στο x^2, $\alpha=1>0$ ενώ η δεύτερη $\alpha=-2<0$.

Στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις **παραγοντοποιούνται** παίρνοντας τη μορφή: $f(x)=\alpha\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες τους. π.χ. $f(x)=1\cdot(x-2)\cdot(x-5)=(x-2)\cdot(x-5)$ και $g(x)=-2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot(x-3)=-(2x-1)(x-3)$.

Δίνοντας διάφορες τιμές στη μεταβλητή x έχουμε:

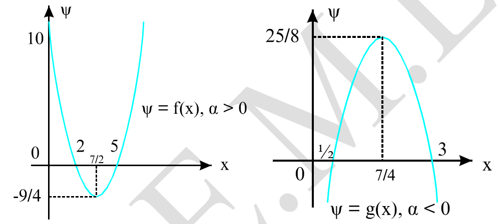
α) $f(-2)=28>0$, $f(0)=10>0$, $f(1)=4>0$, $f(2)=0$, $f(3)=-2<0$, $f\left(-\frac{7}{2}\right)=-\frac{9}{4}<0$, $f(5)=0$, $f(7)=10>0$, $f(0)=40>0$.

β) $g(-2)=-25<0$, $g(0)=-3<0$, $g\left(\frac{1}{2}\right)=0$, $g(1)=2>0$, $g(2)=3>0$, $g(3)=0$, $g(4)=-7<0$, $g(5)=-18<0$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση f έχει **θετικές τιμές δηλ. ομόσημες του α=1>0** για τις τιμές που βρίσκονται έξω από το διάστημα των ριζών δηλαδή για $x<2$ ή $x>5$ και **αρνητικές τιμές** δηλ. **ετερόσημες του α** για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών δηλαδή για $2<x<5$ ενώ μηδενίζεται για $x=2$ και για $x=5$.

Επίσης η συνάρτηση g έχει **αρνητικές τιμές** δηλ. **ομόσημες του** $\alpha=-2<0$ για τις τιμές του x που βρίσκονται έξω από το διάστημα των ριζών δηλαδή για $x<\frac{1}{2}$ ή $x>3$ και **θετικές τιμές** δηλ. **ετερόσημες του α** για τις τιμές του x που βρίσκονται μεταξύ των ριζών δηλαδή για $\frac{1}{2}<x<3$ ενώ μηδενίζεται για $x=\frac{1}{2}$ και για $x=3$.

Τα συμπεράσματα αυτά φαίνονται στις γραφικές παραστάσεις τους:



και δίνονται σχηματικά στον πίνακα:

X	$-\infty$ $\quad$ x_1	x_2	$+\infty$
$f(x)$ ή $g(x)$	ομόσ. α ο	ετερόσ. α ο	ομόσ. α

ΣΥΜΠΕΡΑΣΜΑΤΑ

Οι τιμές της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ (ΤΡΙΩΝΥΜΟ) είναι:

- **ετερόσημες** του α μόνο όταν $\Delta>0$ και για τις τιμές του x μεταξύ των ριζών δηλ. $x_1<x<x_2$ (3η περίπτωση)
- **ομόσημες** του α σε κάθε άλλη περίπτωση εκτός από τις ρίζες της για τις οποίες **μηδενίζεται.**

Αφού μάθαμε να προσδιορίζουμε το πρόσημο του τριωνύμου θα προσπαθήσουμε να επιλύσουμε τα ακόλουθα προβλήματα και ασκήσεις.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Ένα φάρμακο χορηγείται σε ενήλικες και βελτιώνει την υγεία τους σε χρόνο που δίνεται από τη συνάρτηση $f(t)=12t^2-3\kappa t$ όπου κ η ηλικία του ασθενούς και t ο χρόνος σε ημέρες ($t\geq 0$). Σε πόσες μέρες θα αρχίσει να βελτιώνε-

ται η υγεία του ασθενούς (36 ετών), από τη λήψη του φαρμάκου;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

Αναζητούμε τις τιμές του t για τις οποίες η συνάρτηση f έχει θετικές τιμές. Δηλαδή επιλύουμε την ανίσωση: $f(t)>0 \Leftrightarrow 12t^2-3\kappa t>0,\ \kappa>0$.

Είναι: $\alpha=12>0$, $\Delta=9\kappa^2\geq 0$, $\rho_1=0$, $\rho_2=\frac{\kappa}{4}$. Επομένως η συνάρτηση έχει θετικές τιμές όταν $t>\frac{\kappa}{4}$ (οι αρνητικές τιμές του t απορρίπτονται). Δηλαδή η υγεία του ασθενούς θα αρχίσει να βελτιώνεται μετά από $t=\frac{36}{4}=9$ ημέρες.

t	0		κ/4	
f(t)		−		+

ΑΣΚΗΣΗ 1

Για ποιες τιμές του x ορίζεται κάθε μία από τις παρακάτω τετραγωνικές ρίζες:

α) $\sqrt{x^2+2x-3}$ **β)** $\sqrt{1-x^2}$

γ) $\sqrt{x^2-4x+4}$ **δ)** $\sqrt{-x^2+5x-8}$

ΛΥΣΗ

Για να ορίζονται οι παραπάνω τετραγωνικές ρίζες πρέπει το υπόριζό τους να μην είναι αρνητικό.

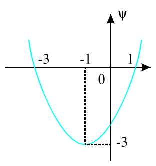
α) Θεωρώ τη συνάρτηση $f(x)=x^2+2x-3$, $x\in\mathbb{R}$.

Είναι: $\alpha=1>0$, $\Delta=16$, $\rho_1=-3$, $\rho_2=1$.

ΑΡΑ: $x^2+2x-3\geq 0 \Leftrightarrow f(x)\geq 0 \Leftrightarrow \boxed{x\leq -3 \text{ ή } x\geq 1}$.

Επίσης:

x	−∞		−3		1		+∞
f(x)		+	0	−	0	+	



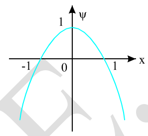
β) Ομοίως τη συνάρτηση $g(x)=1-x^2$, $x\in\mathbb{R}$ ($g(x)=(1-x)(1+x)$).

Είναι: $\alpha=-1<0$, $\Delta=16>0$, $\rho_1=-1$, $\rho_2=1$.

ΑΡΑ: $1-x^2\geq 0 \Leftrightarrow g(x)\geq 0 \Leftrightarrow -1\leq x\leq 1$.

Επίσης:

x	−∞		−1		1		+∞
g(x)		−	0	+	0	−	



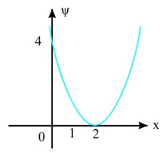
γ) Ομοίως τη συνάρτηση $h(x)=x^2-4x+4$ ($h(x)=(x-2)^2$).

Είναι: $\alpha=1$, $\Delta=0$, $\rho_1=\rho_2=2$.

Άρα: $x^2-4x+4\geq 0 \Leftrightarrow h(x)\geq 0$ που ισχύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Επίσης:

x	−∞		2		+∞
h(x)		+	0	+	

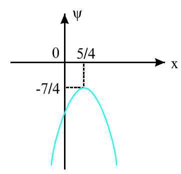


δ) Τέλος, θεωρούμε τη συνάρτηση $\varphi(x)=-x^2+5x-8$.

Είναι: $\alpha=-1<0$, $\Delta=-7$ (δεν έχει ρίζες).

Άρα: $-x^2+5x-8\geq 0 \Leftrightarrow \varphi(x)\geq 0$. Αυτό όμως δεν ισχύει για καμία τιμή της μεταβλητής x αφού το πρόσημο του τιρωνύμου είναι πάντα αρνητικό:

x	−∞		+∞
φ(x)		−	



Επομένως: η τετραγωνική ρίζα αυτή δεν ορίζεται.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να λυθεί η ανίσωση: $|x^2-3x+3|<1$ (1).

ΛΥΣΗ

Η (1) είναι ισοδύναμη με την:

$$-1<x^2-3x+3<1 \Leftrightarrow \begin{cases} -1<x^2-3x+3 \\ x^2-3x+3<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-3x+4>0 \\ x^2-3x+2<0 \end{cases}$$

Το τριώνυμο της πρώτης έχει διακρίνουσα αρνητική: $\Delta=-7<0$, $\alpha=1>0$ οπότε έχει θετικές τιμές (ομόσημες του $\alpha=1$) για κάθε τιμή της μεταβλητής x. **Άρα** η ανίσωση: $x^2-3x+4>0$ επαληθεύεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Το τριώνυμο της δεύτερης έχει διακρίνουσα θετική: $\Delta=1>0$, $\alpha=1>0$ και $\rho_1=1$, $\rho_2=2$.

Εμείς θέλουμε να έχει τιμές ετερόσημες του α, που συμβαίνει για $1<x<2$.

x	$-\infty$		$+\infty$
x^2-3x+4		$-$	

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
x^2-3x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	

Τελικά, οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν στο διάστημα (1,2), δηλαδή $1<x<2$.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Για ποιες τιμές της μεταβλητής x η συνάρτηση $f(x)=\left(\lambda^2+\mu^2\right)x^2-2\kappa x+1$ έχει αρνητικές τιμές; (κ, λ, μ: πλευρές ορθογωνίου τριγώνου).

ΛΥΣΗ

Η συνάρτηση είναι της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma$, $\alpha\neq 0$ (ΤΡΙΩΝΥΜΟ), $x\in\mathbb{R}$.

Είναι: $\alpha=\lambda^2+\mu^2>0$,

$$\Delta=4\kappa^2-4\left(\lambda^2+\mu^2\right)\overset{\lambda^2+\mu^2=\kappa^2}{=\!=\!=}4\kappa^2-4\kappa^2=0.$$

Εμείς θέλουμε να έχει τιμές ετερόσημες του α (αρνητικές).

Αυτό όμως δεν είναι δυνατό να συμβεί αφού $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$. (βλέπε ... συμπεράσματα).

ΑΣΚΗΣΗ 4

Αν $f(x)=x^2-x+1$ και $g(x)=\lambda x^2-2\lambda x+3\lambda$ να βρεθεί για ποιες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}^*$ οι συναρτήσεις έχουν τιμές με γινόμενο αρνητικό.

ΛΥΣΗ

Θέλουμε: $f(x)\cdot g(x)<0$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (1).

Όμως: $f(x)>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ (αφού $\alpha=1>0$ και $\Delta=-3<0$).

Άρα: Η ανίσωση (1) ισχύει αν $g(x)<0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Για το τριώνυμο: $\lambda x^2-2\lambda x+3\lambda$, $\lambda\neq 0$ έχουμε: $\alpha=\lambda$, $\Delta=-3\lambda^2<0$. **Άρα:** για να έχει αρνητικές τιμές για κάθε $x\in\mathbb{R}$ πρέπει $\alpha=\lambda<0$ οπότε αφού $\Delta<0$ να έχει για κάθε $x\in\mathbb{R}$ τιμές ομόσημες του α. **Απάντηση:** Για $\lambda<0$.

ΑΣΚΗΣΗ 5

Το κλάσμα $\dfrac{x-1}{x^2-x+1}$ για $x=1$ γίνεται μηδέν. Ποια είναι η μεγαλύτερη τιμή του και ποια η μικρότερη όταν $x\neq 1$.

ΛΥΣΗ

Κατ' αρχήν το κλάσμα ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ αφού $x^2-x+1\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ($\Delta=-3<0$).

Έστω $\dfrac{x-1}{x^2-x+1}=\lambda$ τότε: $\lambda\left(x^2-x+1\right)=x-1$ δηλαδή $\lambda x^2-(\lambda+1)x+(\lambda+1)=0$ (1).

Η εξίσωση (1) πρέπει να έχει ως προς x λύσεις στο σύνολο των πραγματικών αριθμών.

Αν $\boxed{\lambda=0}$ είναι 1ου βαθμού ως προς x γίνεται: $-x+1=0\Leftrightarrow x=1$ (δεκτή λύση).

Αν $\boxed{\lambda\neq 0}$ είναι 2ου βαθμού και έχει λύσεις (ως προς x) στο $\mathbb{R}$.

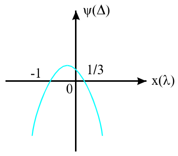
Πρέπει $\Delta\geq 0\Leftrightarrow\left[-(\lambda+1)\right]^2-4\cdot\lambda\cdot(\lambda+1)\geq 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3\lambda^2-2\lambda+1\geq 0$ (2).

Η ανίσωση (2) είναι τριώνυμο ως προς λ, έχει: $\alpha=-3$, $\Delta=16>0$, $\rho_1=-1$, $\rho_2=\dfrac{1}{3}$.

Εμείς θέλουμε να έχει τιμές ετερόσημες του α ή μηδέν και αυτό συμβαίνει όπως φαίνεται και στον πίνακα και στη γραφική παράσταση:

λ	$-\infty$	-1		$\frac{1}{3}$	$+\infty$
Δ	$-$	0	$+$	0	$-$



για $-1 \le \lambda \le \frac{1}{3}$.

Επομένως: Η μικρότερη τιμή του κλάσματος είναι -1 και η μεγαλύτερη $\frac{1}{3}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΡΟΣ ΛΥΣΗ

1. Έστω συνάρτηση $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \ne 0$. Τι συμπεραίνετε για τις τιμές του κ αν: α) $3 \cdot f(\kappa) = 0$, β) $\alpha \cdot f(\kappa) < 0$, γ) $\alpha \cdot f(\kappa) > 0$.

2. Αν για τους αριθμούς κ_1, κ_2 έχουμε: $f(\kappa_1) \cdot f(\kappa_2) < 0$, ποιο συμπέρασμα προκύπτει για το τριώνυμο f, τους αριθμούς κ_1, κ_2 και τις ρίζες του;

3. Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = x^2 - 2\lambda x + \lambda^2$. Ποιες από τις παρακάτω ανισώσεις είναι αληθείς;

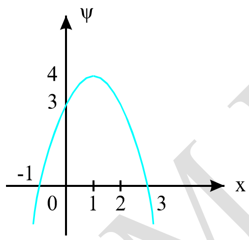
α) $f\left(-\frac{2002}{3}\right) > 0$, β) $5 \cdot f(\lambda) = 0$,

γ) $2 \cdot f(0) < 0$, δ) $f(2004) > 0$, ε) $f(5+\lambda) > 0$.

4. Για ποιες τιμές του λ η ανίσωση: $-x^2 + 4x + (2-\lambda) < 0$ είναι αληθής για κάθε τιμή της μεταβλητής x;

5. Το κλάσμα $\frac{x}{x^2+2}$ για ποιες τιμές της μεταβλητής x είναι μικρότερο από $\frac{1}{2}$;

6. Αν η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \ne 0$ είναι



να βρείτε το πρόσημο των τιμών $f(0)$, $f(10)$, $f(-4)$, $f(-1)$, $f(2)$, της διακρίνουσας και του συντελεστή α.

7. Το περιοδικό «ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄» της Ε.Μ.Ε. κυκλοφορεί σε x τεύχη. Αν το κόστος του περιοδικού δίνεται από τη συνάρτηση $\sigma(x) = -\lambda x^2 - \lambda x + 2$ και οι εισπράξεις από τις πωλήσεις του απ' την $\pi(x) = x^2 - x + 1 + \lambda$, $\lambda > 1$ ν' αποδείξετε ότι όποια κι αν είναι η κυκλοφορία του περιοδικού η ΕΜΕ θα έχει πάντα κέρδος.

(**Υπόδειξη:**

Κέρδος: $\kappa(x) = \pi(x) - \sigma(x) = (x^2 - x + 1 + \lambda) - (-\lambda x^2 - \lambda x + 2) =$ $(1+\lambda)x^2 - (1-\lambda)x - (1-\lambda)$).