Επίλυση Προβλημάτων με Παραγώγους

Κώστας Βακαλόπουλος
Άννα Βακαλοπούλου

Στο άρθρο που ακολουθεί παρουσιάζονται μια σειρά από προβλήματα που λύνονται με τη βοήθεια των παραγώγων.

Στην επίλυσή τους χρησιμοποιείται αφ' ενός μεν η έννοια της παραγώγου ως ρυθμός μεταβολής αφ' ετέρου ο προσδιορισμός των ακροτάτων τιμών μιας συνάρτησης με τη βοήθεια των παραγώγων.

Η επίλυση πολλές φορές γίνεται σύντομα, παραλείποντας τις ενδιάμεσες πράξεις που αφήνονται για τον αναγνώστη.

Με τα προβλήματα αυτά δίνεται η ευκαιρία να δούμε αξιόλογες και πρωτότυπες εφαρμογές των παραγώγων. Δίνεται έτσι στους μαθητές της Γ΄ Λυκείου μια πρώτη απάντηση στο που χρησιμεύουν οι παράγωγοι αφού πολλές απαντήσεις σ' αυτό θα πάρουν στις σπουδές που θ' ακολουθήσουν.

Πρόβλημα 1

Ο όγκος μιας σφαίρας αυξάνεται με ρυθμό 10 cm^3/sec.

α) Να βρείτε το ρυθμό αύξησης της επιφάνειας της σφαίρας τη χρονική στιγμή που η ακτίνα της είναι $r = 5$ cm.

β) Ποια είναι η ακτίνα της σφαίρας τη χρονική στιγμή που η επιφάνειά της αυξάνεται με ρυθμό 2 cm^2/sec.

Λύση

Ως γνωστόν: $V = V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$. Όμως $r = r(t)$ (συνάρτηση του t)

Άρα: $\frac{dV}{dt} = \left(\frac{4}{3}\pi r^3(t)\right)' = 4\pi r^2(t)\, r'(t)$ **(1)**

Άρα: $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_0} = 4\pi r^2(t_0)\, r'(t_0)$ **(2)**

α) Αν t_0 η χρονική στιγμή που $r = r(t_0) = 5$ cm έχουμε:

$\left.\frac{dV}{dt}\right|_{t=t_0} = 10\ cm^3/_{sec}$ **(3)**

Από (2) και (3) έχουμε:

$r'(t_0) = \left.\frac{dr}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{1}{10\cdot\pi}\ cm/_{sec}$

Ως γνωστόν: $E = E(r) = 4\pi r^2$

Άρα: $\frac{dE}{dt} = \left(4\pi r^2(t)\right)' = 8\pi\, r(t)\, r'(t)$ **(4)**

Άρα: $\left.\frac{dE}{dt}\right|_{t=t_0} = 8\pi\, r(t_0)\, r'(t_0) = 4\ cm^2/_{sec}$

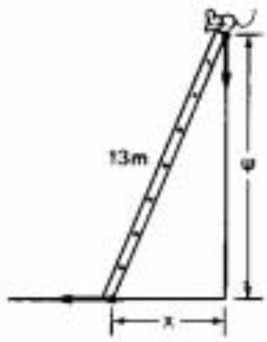
β) Αν t_1 η χρονική στιγμή που ο ρυθμός μεταβολής της επιφάνειας είναι: 2 cm^2/sec, με διαίρεση κατά μέλη των ισοτήτων (1) και (4) έχουμε:

$\frac{10}{2} = \frac{r(t_1)}{2}$ άρα: $r = r(t_1) = 10$ cm.

Πρόβλημα 2

Ένας ποντικός βρίσκεται στην κορυφή μιας σκάλας ύψους 13 m, που είναι στερεωμένη πλάγια σ' ένα τοίχο. Αν η βάση της σκάλας γλιστράει με ρυθμό 3m/sec, όταν είναι 5m από τον τοίχο, να βρεθεί ο ρυθμός που πέφτει ο ποντικός!

Λύση



Αν $\psi = \psi(t)$ η συνάρτηση θέσης του ποντικού και $x = x(t)$ η συνάρτηση θέσης της βάσης της σκάλας, για οποιαδήποτε χρονική στιγμή, έχουμε:

$\psi^2 = 169 - x^2$

Άρα: $2\psi\frac{d\psi}{dt} = -2x\frac{dx}{dt}$ ή $\psi(t)\cdot\psi'(t) = -x(t)\cdot x'(t)$

Αν t_0 η χρονική στιγμή που η σκάλα είναι σε απόσταση $x = x(t_0) = 5$ m από τον τοίχο, είναι:

$$\psi = \psi(t_0) = \sqrt{169-25} = 12\text{ m}$$

Άρα:

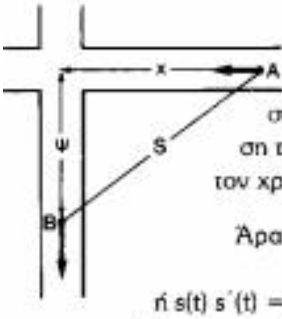
$$\psi'(t_0) = \left.\frac{d\psi}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{-x(t_0)\cdot x'(t_0)}{\psi(t_0)} = -5/_4\ m/_{sec}$$

Άρα ο ποντικός πέφτει με ρυθμό 5/4 m/sec.

Πρόβλημα 3

Ένα ποδήλατο είναι 4 km ανατολικά από ένα σταυροδρόμι και ταξιδεύει προς το σταυροδρόμι με ταχύτητα 9km/h. Την ίδια χρονική στιγμή ένα άλλο ποδήλατο είναι 3 km νότια από το σταυροδρόμι και απομακρύνεται απ' αυτό με ταχύτητα 10 km/h. Η απόστασή τους αυξάνεται ή μειώνεται, και με τι ρυθμό;

Λύση



Αν $x = x(t)$ και $\psi = \psi(t)$ οι συναρτήσεις θέσης των δύο ποδηλάτων Α, Β αντίστοιχα και $s = s(t)$ η συνάρτηση της απόστασής τους, ως προς τον χρόνο θα ισχύει: $s^2 = x^2 + \psi^2$.

Άρα: $2s\dfrac{ds}{dt} = 2x\dfrac{dx}{dt} + 2\psi\dfrac{d\psi}{dt}$

ή $s(t)\,s'(t) = x(t)\,x'(t) + \psi(t)\,\psi'(t)$.

Αν t_0 η χρονική στιγμή που τα ποδήλατα Α, Β απέχουν από το σταυροδρόμι, $x = x(t_0) = 4$ km και $\psi = \psi(t_0) = 3$ km αντίστοιχα, η απόστασή τους είναι:

$$s = s(t_0) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ Km}$$

Άρα:

$$s'(t_0) = \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=t_0} = \frac{x(t_0)\cdot x'(t_0) + \psi(t_0)\cdot\psi'(t_0)}{s(t_0)} =$$

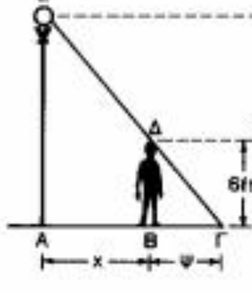
$$\frac{4\,(-9) + 3\cdot 10}{5} = 1{,}2 \ {}^{\text{Km}}\!/_{\text{h}}$$

Επομένως: Η απόσταση των δύο ποδηλάτων μειώνεται με ρυθμό: 1,2 km/h.

Πρόβλημα 4

Μια λάμπα είναι 15 ft ψηλότερα από ένα πεζοδρόμιο. Ένας άνθρωπος 6 ft ψηλός (1,80 m) απομακρύνεται από το σημείο κάτω από τη λάμπα με ρυθμό 6 ft/sec. Πόσο γρήγορα μακραίνει η σκιά του;

Λύση



Αν $x = x(t)$ η συνάρτηση θέσης του ανθρώπου και $\psi = \psi(t)$ η συνάρτηση του μήκους της σκιάς ως προς το χρόνο, από τα όμοια τρίγωνα: ΑΓΕ ∼ ΒΓΔ

έχουμε: $\dfrac{A\Gamma}{AE} = \dfrac{B\Gamma}{B\Delta}$ ή $\dfrac{x+\psi}{15} = \dfrac{\psi}{6}$

Άρα: $\psi = \dfrac{2}{3}x$ ή $\psi(t) = \dfrac{2}{3}x(t)$

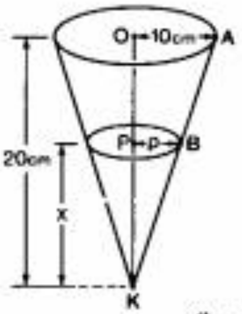
Άρα: $\dfrac{d\psi}{dt} = \dfrac{2}{3}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{2}{3}6 = 4 \ {}^{\text{ft}}\!/_{\text{sec}}$

Επομένως: Η σκιά του μακραίνει με ρυθμό 4 ft/sec.

Πρόβλημα 5

Από ένα κωνικό χωνί χύνεται νερό με ρυθμό 5 cm^3/sec. Αν το ύψος του χωνιού είναι 20 cm και η ακτίνα της βάσης 10 cm, να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής του ύψους του νερού όταν το ύψος του είναι 5 cm.

Λύση



Αν $x = x(t)$ η συνάρτηση μεταβολής του ύψους του νερού και $\rho = \rho(t)$ της ακτίνας ΚΒ, από τα όμοια τρίγωνα: ΚΟΑ ∼ ΚΡΒ έχουμε:

$\dfrac{KP}{PB} = \dfrac{KO}{OA}$ άρα $\dfrac{x}{\rho} = \dfrac{20}{10}$

Άρα: $\rho = \dfrac{1}{2}x$ ή $\rho(t) = \dfrac{1}{2}x(t)$

Ως γνωστόν: $V = \dfrac{1}{3}\pi\rho^2 x$ ή

$$V = V(x) = \frac{1}{3}\pi\frac{1}{4}x^3(t) = \frac{\pi}{12}x^3(t)$$

Ο ρυθμός του νερού που χύνεται είναι:

$$\frac{dV}{dt} = \left(\frac{\pi}{12}x^3(t)\right)' = \frac{\pi}{4}x^2(t)\,x'(t)$$

Αν t_0 η χρονική στιγμή όπου $x = x(t_0) = 5$ cm, τότε:

$$x'(t_0) = \frac{dx}{dt} = \frac{-5}{\frac{\pi}{4}5^2} = -\frac{4}{5\pi} \ {}^{\text{cm}}\!/_{\text{sec}}$$

(Επειδή το νερό χύνεται ο ρυθμός του είναι –5 cm^3/sec)

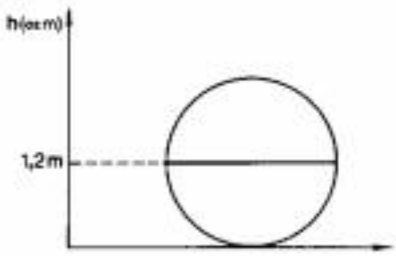
Άρα: Το ύψος του νερού μειώνεται με ρυθμό

$$\frac{4}{5\pi} \ {}^{\text{cm}}\!/_{\text{sec}}.$$

Πρόβλημα 6

Μια σφαιρική δεξαμενή με ακτίνα 1,2m γεμίζει με λάδι, με σταθερή παροχή 100 lit/min. Με τι ρυθμό ανεβαίνει το ύψος h του λαδιού μέσα στη δεξαμενή όταν αυτή είναι γεμάτη μέχρι τη μέση.

Λύση



Σημείωση: *Το τμήμα της σφαίρας που γεμίζει είναι σφαιρικό τμήμα (βλέπε: Γεωμετρία Β΄ Λυκείου ΟΕΔΒ 1992, § 6.7 Εφαρμογή 3 ή Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου ΟΕΔΒ §10.2 Άσκηση 7).*

Ο όγκος του λαδιού σε κάθε χρονική στιγμή δίνεται από τον τύπο: $V = \frac{\pi}{3}(3R-h)\,h^2$ όπου R η ακτίνα της σφαίρας και $h = h(t)$ η συνάρτηση του ύψους του λαδιού, ως προς τον χρόνο.

Άρα: $$\frac{dV}{dt} = \left[\frac{\pi}{3}(3R-h(t))\,h^2(t)\right]'$$

$$= \pi\left(2Rh(t) - h^2(t)\right)h'(t)$$

Όμως: $$\frac{dV}{dt} = 100\ {}^{lit}/_{min} = \frac{1}{10}\,\frac{m^3}{min}$$

Αν t_0 η χρονική στιγμή που το ύψος του λαδιού είναι στο μέσον της σφαίρας, τότε $h = h(t_0) = 1{,}2$ m.

Άρα: $$\left.\frac{dh}{dt}\right|_{t=t_0} = h'(t_0) = \frac{{}^{dV}/_{dt}}{\pi\left(2Rh(t_0) - h^2(t_0)\right)} =$$

$$= \frac{1}{14{,}4\pi} \approx 0{,}022\ \frac{m}{min}$$

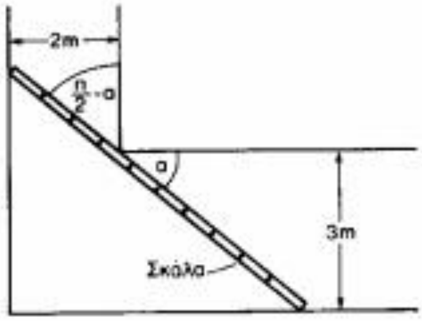
Άρα το ύψος του λαδιού, όταν η δεξαμενή είναι γεμάτη μέχρι την μέση, ανεβαίνει με ρυθμό 0,022 m/min.

Άσκηση

Να βρείτε τον ρυθμό που ανεβαίνει το ύψος του λαδιού στο προηγούμενο πρόβλημα όταν η δεξαμενή είναι γεμάτη κατά το 1/4, το 1/3 και τα 3/4 αντίστοιχα.

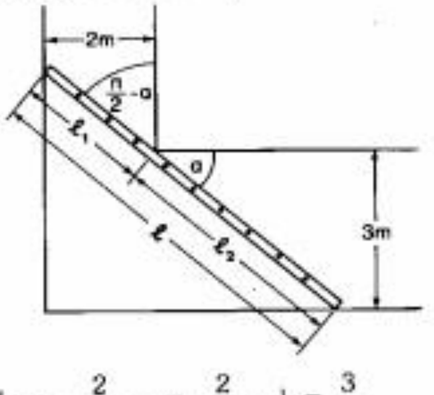
Πρόβλημα 7

Ποιο μήκος το πολύ επιτρέπεται να έχει μια σκάλα όταν αυτή πρέπει να κινηθεί οριζόντια περί την γωνία όπως στο σχήμα.



Λύση

Θέτουμε το μήκος l ως συνάρτηση της γωνίας α και προσδιορίζουμε το ελάχιστο αυτής της συνάρτησης όπως φαίνεται στο σχήμα 2



$$l_1 = \frac{2}{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)} = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\alpha},\ l_2 = \frac{3}{\eta\mu\alpha}$$

Άρα: $$l = l(\alpha) = \frac{2}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{3}{\eta\mu\alpha},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

Η l είναι παραγωγίσιμη στο $(0, \pi/2)$ με:

$$l'(\alpha) = \left(\frac{2}{\sigma\upsilon\nu\alpha} + \frac{3}{\eta\mu\alpha}\right)' = 2\,\frac{\eta\mu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} + 3\,\frac{(-\sigma\upsilon\nu\alpha)}{\eta\mu^2\alpha} =$$

$$= \frac{2\eta\mu^3\alpha - 3\,\sigma\upsilon\nu^3\alpha}{\eta\mu^2\alpha\,\sigma\upsilon\nu^2\alpha}$$

• $l'(α) = 0 \Leftrightarrow 2ημ^3α - 3\,συν^3α = 0 \Leftrightarrow \frac{ημ^3α}{συν^3α} = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow εφα = \sqrt[3]{\frac{3}{2}} = 1,144$ άρα $α \approx 0,85$ (rad)

• $l'(α) > 0 \Leftrightarrow 2ημ^3α - 3συν^3α > 0$

$\Leftrightarrow 2ημ^3α > 3συν^3α \Leftrightarrow εφ^3α > = \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow εφα > \sqrt[3]{\frac{3}{2}} \Leftrightarrow$ άρα $α > 0,85$ (rad)

• $l'(α) < 0 \Leftrightarrow 2ημ^3α - 3συν^3α < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dots\ α < 0,85$ (rad)

Έτσι η μονοτονία και τα ακρότατα της l φαίνονται από το σχήμα:

x	0	0,85	π/2
l΄	–	0	+
l	↘		↗

Άρα για α = 0,85 (rad) η συνάρτηση l παρουσιάζει ελάχιστο το:

$$l(α) = l(0,85) = \frac{2}{συν(0,85)} + \frac{3}{ημ(0,85)} \approx 7,02$$

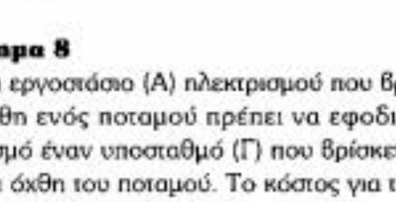
Άρα: Το ελάχιστο ύψος της σκάλας ώστε να κινείται όπως στο σχήμα πρέπει l = 7,02 ή l = 7m.

Άρα: Η σκάλα επιτρέπεται να έχει το πολύ, μήκος $l \approx 7,02$ ή $l \approx 7$m.

Πρόβλημα 8

Ένα εργοστάσιο (Α) ηλεκτρισμού που βρίσκεται στην όχθη ενός ποταμού πρέπει να εφοδιάσει με ηλεκτρισμό έναν υποσταθμό (Γ) που βρίσκεται στην απέναντι όχθη του ποταμού. Το κόστος για την υποβρύχια καλωδίωση είναι διπλάσιο απ' ό,τι στο έδαφος. Πού πρέπει να βρίσκεται το σημείο Β, στην απέναντι όχθη του ποταμού ώστε το κόστος να είναι ελάχιστο; (Θεωρήστε το κόστος για 1 km υπόγειας καλωδίωσης Κ δρχ.)

Λύση



Έστω το κόστος για 1 km, υπόγειας καλωδίωσης Κ δρχ. Έστω ακόμη ότι η καλωδίωση θα είναι κάτω από το νερό μέχρι το Β (ΔΒ = x) και στο έδαφος μέχρι το Γ (ΒΓ = 20 – x). Το κόστος της καλωδιακής σύνδεσης θα είναι:

$Π(x) = 2K\sqrt{x^2+1} + K(20-x),\ 0 \le x \le 2$

Έχουμε $Π'(x) = K\left(\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right) =$

$= K\frac{3x^2-1}{\sqrt{x^2+1}\left(2x+\sqrt{x^2+1}\right)},\ 0 \le x \le 20$

Το πρόσημο της Π΄ και η μονοτονία φαίνονται από το σχήμα:

x	0	$\sqrt{3}/3$	20
Π΄	–	0	+
Π	↘		↗

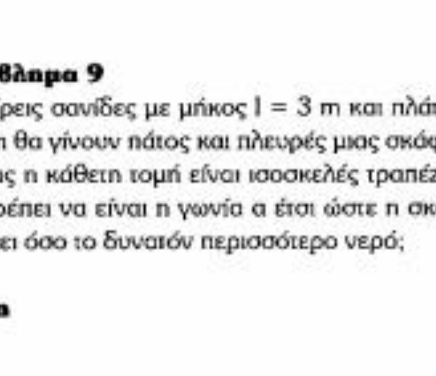
Άρα η συνάρτηση Π παρουσιάζει στο $\sqrt{3}/3$ τοπικό ελάχιστο το $Π\left(\sqrt{3}/3\right) = K(20+\sqrt{3}) \approx 21,73K$

Επομένως: το ελάχιστο κόστος θα επιτευχθεί αν το σημείο Β βρίσκεται σε απόσταση $\sqrt{3}/3$ Km από το Δ.

Πρόβλημα 9

Τρεις σανίδες με μήκος l = 3 m και πλάτος b = 50 cm θα γίνουν πάτος και πλευρές μιας σκάφης, της οποίας η κάθετη τομή είναι ισοσκελές τραπέζιο. Πόση πρέπει να είναι η γωνία α έτσι ώστε η σκάφη να χωράει όσο το δυνατόν περισσότερο νερό;

Λύση



Μπορώ να θεωρήσω τη σκάφη ως πρίσμα με βάση τραπέζιο και ύψος το μήκος l της σανίδας. Ως γνωστό: $V_{πρ.} = E_{βάσης}\, υ$. Ο όγκος του νερού που χωράει η σκάφη είναι ανάλογη του εμβαδού της κάθετης τομής της.

Όμως $E = \dfrac{b + (b + 2x)}{2}\, h = (b + x)h$

Επίσης: $h = b$ ημα και $x = b$ συνα

Άρα $E = E(α) = (b + b\text{συν}α)b\text{ημ}α =$

$$= b^2\left(\text{ημ}α + \frac{1}{2}\text{ημ}2α\right),\ 0 < α < \frac{π}{2}$$

$$E'(α) = b^2(\text{συν}α + \text{συν}2α)$$

$$E'(α) = 0 \Leftrightarrow \text{συν}α + \text{συν}2α = 0 \Leftrightarrow$$

$$α = \frac{π}{3},\ \text{αφού}\ \left(0 < α \le \frac{π}{3}\right)$$

$$E''(α) = b^2(-\text{ημ}α - 2\text{ημ}2α)$$

$$\text{Άρα: } E''\left(\frac{π}{3}\right) = b^2\left(-\text{ημ}\frac{π}{3} - 2\text{ημ}2\frac{π}{3}\right) =$$

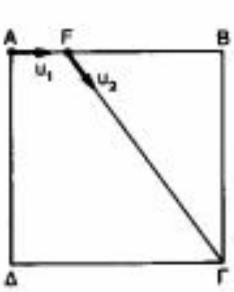
$$= b^2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3}{2}\sqrt{3}b^2 < 0$$

Επομένως: Για $α = π/3$ η συνάρτηση $E = E(α)$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή. Δηλ. η γωνία α πρέπει να είναι $π/3$ rad

Πρόβλημα 10

Μια πισίνα ΑΒΓΔ έχει διαστάσεις 20m x 20m. Ένας άνδρας βρίσκεται στο σημείο Α και θέλει να φτάσει στο σημείο Γ στον ελάχιστο δυνατό χρόνο. Μπορεί να περπατήσει με ταχύτητα $υ_1 = 5$ km/h και να κολυμπήσει με ταχύτητα $υ_2 = 3$ km/h. Πώς θα το πετύχει αυτό;

Λύση



Έστω ότι ο άνδρας περπατάει μέχρι το Ε ώστε (ΕΒ) = x και από εκεί κολυμπάει μέχρι το Γ. Προφανώς:

$$(ΕΓ) = \sqrt{x^2 + 400},\ 0 \le x \le 20$$

Αν t_1 και t_2 οι χρόνοι που περπατάει και κολυμπάει αντίστοιχα, θα είναι:

$$t_1 = \frac{(ΑΕ)}{υ_1} = \frac{20 - x}{5} \quad \text{και} \quad t_2 = \frac{(ΕΓ)}{υ_2} = \frac{\sqrt{x^2 + 400}}{3}$$

Η συνάρτηση $t = t(x)$ του χρόνου της κίνησης ως προς x δίνεται από τον τύπο:

$$t(x) = \frac{20 - x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 + 400}}{3},\ 0 \le x \le 20$$

$$\text{Έχουμε: } t'(x) = \frac{-3\sqrt{400 + x^2} + 5x}{15\sqrt{400 + x^2}}$$

$$t'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 15$$

$$t''(x) = \frac{400}{3(400 + x^2)\sqrt{400 + x^2}},\ t''(15) > 0$$

Άρα για $x = 15$ η συνάρτηση t παρουσιάζει ελάχιστο δηλαδή για να πετύχει ελάχιστο χρόνο, το σημείο Ε πρέπει να βρίσκεται σε απόσταση 15 m από το Β.

Πρόβλημα 11

Το άθροισμα ενός μη αρνητικού αριθμού και του διπλασίου ενός άλλου είναι 40. Βρείτε τους αριθμούς έτσι ώστε:

α) Το γινόμενο τους να είναι μέγιστο.

β) Το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο.

Λύση

Έστω x, ψ οι ζητούμενοι αριθμοί. Τότε: $x + 2ψ = 40$. Πρέπει $0 \le x \le 40$ και $0 \le ψ \le 20$.

α) Αν $P = P(ψ)$ η συνάρτηση του γινομένου τους ως προς ψ, τότε:

$P(ψ) = (40 - 2ψ)ψ = 40ψ - 2ψ^2$

$P'(ψ) = 40 - 4ψ$

$P'(ψ) \ge 0 \Leftrightarrow ψ \le 10$ ενώ

$P'(ψ) \le 0 \Leftrightarrow ψ \ge 10$

ψ	0		10		20
$P'(ψ)$		+	0	–	
$P(ψ)$		↗	max	↘	

Άρα: για ψ = 10 και x = 20 το γινόμενό τους γίνεται μέγιστο (P(10) = 200).

β) Αν $S = S(\psi)$ η συνάρτηση του αθροίσματος των τετραγώνων τους, ως προς ψ, τότε:

$S(\psi) = (40-2\psi)^2 + \psi^2$

$S'(\psi) = -4(40-2\psi) + 2\psi = -160 + 10\psi$

$S'(\psi) \geq 0 \Leftrightarrow \psi \geq 16$ ενώ

$S'(\psi) \leq 0 \Leftrightarrow \psi \leq 16$

ψ	0		16		20
S΄(ψ)		−	0	+	
S(ψ)		↘	min	↗	

Άρα για ψ = 16 και x = 8 το άθροισμα των τετραγώνων τους γίνεται ελάχιστο S(16) = 320.

Πρόβλημα 12

Ένα κυλινδρικό δοχείο ανοιχτό επάνω έχει συνολική επιφάνεια Ε. Να βρεθεί η σχέση μεταξύ ύψους h του δοχείου και διαμέτρου της βάσης του d, ώστε να έχουμε τον μέγιστο δυνατό όγκο.

Λύση

Ως γνωστόν: $E = \pi (d/2)^2 + \pi d h$ άρα

$$h = \frac{E}{\pi d} - \frac{d}{4} \qquad (1)$$

$$\text{Άρα: } V = \pi \frac{d^2}{4}\left(\frac{E}{\pi d} - \frac{d}{4}\right) = \frac{E \cdot d}{4} - \pi\frac{d^3}{16}$$

Η συνάρτηση του όγκου V ως προς d είναι:

$$V = V(d) = \frac{E}{4}d - \frac{\pi}{16}d^3,\ d > 0$$

$$\text{Έχουμε: } V'(d) = \frac{E}{4} - \frac{3\pi}{16}d^2$$

$$\text{Όμως: } V'(d) = 0 \Leftrightarrow d^2 = \frac{4E}{3\pi} \text{ άρα } d = 2\sqrt{\frac{E}{3\pi}}$$

$$V''(d) = -\frac{3\pi d}{8}$$

$$V''\left(2\sqrt{\frac{E}{3\pi}}\right) < 0$$

Άρα: για $d = 2\sqrt{\frac{E}{3\pi}}$ η συνάρτηση V παρουσιάζει μέγιστο.

$$\text{Από (1) έχουμε: } \frac{h}{d} = \frac{E}{\pi d^2} - \frac{1}{4} = \frac{E}{\pi \frac{4E}{3\pi}} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Άρα: } \frac{h}{d} = \frac{1}{2}$$

Πρόβλημα 13

Ένας άνθρωπος έχει 400 μ. φράκτη, για να περιφράξει δύο χωριστά χωράφια. Το ένα απ' αυτά είναι ορθογώνιο με διαστάσεις x, 3x και το άλλο τετράγωνο με πλευρά ψ. Το ορθογώνιο χωράφι πρέπει να έχει το λιγότερο 300 τ.μ. εμβαδόν και το τετράγωνο 100 τ.μ. (το λιγότερο). Ποιά είναι η μέγιστη συνολική επιφάνεια που μπορεί να περιφράξει.

Λύση

Περιορισμοί: $x\,3x \geq 300 \Leftrightarrow x \geq 10$

$\psi^2 \geq 100 \Leftrightarrow \psi \geq 10$

Η περίμετρος των δύο χωραφιών είναι:

$2(3x + x) + 4\psi = 400 \Leftrightarrow \psi = 100 - 2x$ (1)

Όμως: $\psi \geq 10 \Leftrightarrow 100 - 2x \geq 10 \Leftrightarrow x \leq 45$.

Άρα: $10 \leq x \leq 45$.

Αν $E = E(x)$ η συνάρτηση του εμβαδού και των δύο χωραφιών, ως προς x θα είναι:

$E(x) = 3x^2 + (100-2x)^2 = 7x^2 - 400x + 10.000$, $10 \leq x \leq 45$

	0		200/7		45
Ε΄		−	0	+	
Ε		↘	ΤΕ	↗	

$E'(x) = 14x - 400$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{200}{7}$$

$$E''(x) = 14 > 0. \text{ Άρα: } E''\left(\frac{200}{7}\right) > 0.$$

Άρα για $x = \frac{200}{7}$ η συνάρτηση Ε παρουσιάζει ελάχιστο. Εμείς όμως αναζητούμε το μέγιστο της συνάρτησης που θα το βρούμε στα άκρα του διαστήματος [10, 45]:

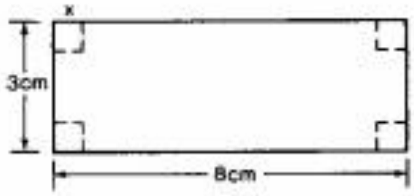
$E(10) = 7 \cdot 10^2 - 400 \cdot 10 + 10.000 = 6.700$

$E(45) = 7 \cdot 45^2 - 400 \cdot 45 + 10.000 = 6.175$

Επειδή: $E(10) > E(45)$, το μέγιστο εμβαδόν που μπορεί να περιφράξει είναι 6.700 τ.μ. για x = 10 και ψ = 80.

Πρόβλημα 14

Από ένα κομμάτι χαρτονιού διαστάσεων 8 cm 3 cm πρόκειται να κατασκευάσουμε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο κουτί ανοιχτό από πάνω, κόβοντας από κάθε γωνία ένα τετράγωνο και λυγίζοντας κατάλληλα προς τα πάνω τις τέσσερις πλευρές. Ποιό είναι το μέγεθος της πλευράς του τετραγώνου που πρέπει να κόψουμε έτσι ώστε ο όγκος του σχηματιζόμενου κουτιού να είναι μέγιστος.



Λύση

Έστω x η πλευρά του τετραγώνου που θα κοπεί. Τότε: $2x < 8$ και $2x < 3$ άρα: $x \in (0, 3/2)$. Οι διαστάσεις του κουτιού που θα σχηματισθεί θα είναι: ύψος $= x$, μήκος $= 8 - 2x$, πλάτος $= 3 - 2x$.

Αν $V = V(x)$ η συνάρτηση του όγκου του κουτιού, ως προς x, τότε: $V(x) = x\,(8 - 2x)\,(3 - 2x) = 4x^3 - 22x^2 + 24x = 2x(2x^2 - 11x + 12)$, $0 < x < 3/2$

$V'(x) = 4(3x^2 - 11x + 6)$, $0 < x < 3/2$.

Το πρόσημο της V΄ και η μονοτονία της V δίνονται στον πίνακα.

	0		2/3		3/2		3
V΄		+		–			0
V		↗	max	↘			

Άρα για $x = 2/3$ η συνάρτηση V παρουσιάζει μέγιστο. Επομένως: η πλευρά του τετραγώνου πρέπει να είναι 2/3 cm.

Βιβλιογραφία

Hahn/Dzewas: ANALYSIS
N. Haralambis: CALCULUS
Κ. Βακαλόπουλου: Σημειώσεις Ανάλυσης