Εύρεση πρωτευόντων στοιχείων τριγώνου από δευτερεύοντα στοιχεία του.

Επιμέλεια: Κώστας Βακαλόπουλος

(ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄, τεύχος 70)

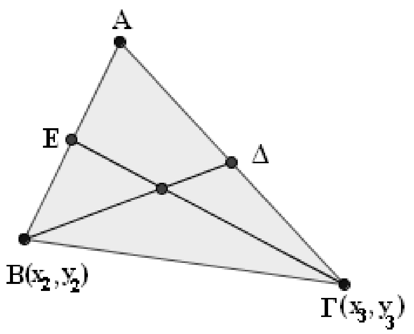
ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Με αφορμή την άσκηση 2 (σελ. 65) του σχολικού βιβλίου της κατεύθυνσης των Μαθηματικών της Β΄ Λυκείου μια ομάδα μαθητών αποτελούμενη από τους : Χρήστο Τριανταφύλλου, Νατάσα Λέκκου, Μαρία Φρογουδάκη έψαξαν και βρήκαν στην βιβλιογραφία τους ασκήσεις στις οποίες ζητούνται τα κύρια στοιχεία ενός τριγώνου και συγκεκριμένα οι εξισώσεις των πλευρών και οι κορυφές του, όταν γνωρίζουμε δευτερεύοντα στοιχεία του, όπως τα ύψη, οι διάμεσοι και οι διχοτόμοι. Οι μαθητές τις έλυσαν, τις έκαναν μια «παρέα ασκήσεων» εμείς τις επεξεργαστήκαμε και σας τις παρουσιάζουμε για την ωφέλεια όλων.

ΑΣΚΗΣΗ 1η

Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών τριγώνου ΑΒΓ αν είναι Α(1,3) και x – 2y+1=0, y – 1 = 0 οι εξισώσεις των διαμέσων του.

ΛΥΣΗ



Έστω ΑΒΓ το τρίγωνό μας. Επειδή οι συντεταγμένες του Α δεν επαληθεύουν τις εξισώσεις των διαμέσων, οι εξισώσεις που δίνονται, αυτές αντιστοιχούν στις άλλες διαμέσους , έστω ΒΔ: $x - 2y + 1 = 0$ και ΓΕ: $y - 1 = 0$.

Έστω $B(x_2, y_2)$ και $\Gamma(x_3, y_3)$.

(Προφανώς αν βρούμε τις συντεταγμένες των Β, Γ …τελειώσαμε !)

☒ Το Β ανήκει στην ΒΔ άρα: $x_2 - 2y_2 + 1 = 0$ (1)

Αν Ε το μέσο της ΑΒ είναι $E\left(\dfrac{1+x_2}{2}, \dfrac{3+y_2}{2}\right)$ και ανήκει στην ΓΕ. Άρα επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή: $\dfrac{3+y_2}{2} - 1 = 0$ (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) έχουμε:

$y_2 = -1$, $x_2 = -3$, άρα $B(-3, -1)$.

☒ Το Γ ανήκει στην ΓΕ άρα: $y_3 - 1 = 0$ (3)

Αν Δ το μέσο της ΑΓ είναι $E\left(\dfrac{1+x_3}{2}, \dfrac{3+y_3}{2}\right)$ και ανήκει στην ΒΔ. Άρα επαληθεύει την εξίσωσή της, δηλαδή: $\dfrac{1+x_3}{2} - 2\cdot\dfrac{3+y_3}{2} + 1 = 0$ (4)

Λύνοντας το σύστημα των (3), (4) έχουμε:

$y_3 = 1$, $x_3 = 5$, άρα $\Gamma(5, 1)$.

Από τα σημεία $A(1, 3)$, $B(-3, -1)$, $\Gamma(5,1)$ προσδιορίζουμε τις εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου: ΑΒ: $x - y + 2 = 0$, ΒΓ: $x - 4y - 1 = 0$ και ΑΓ: $x + 2y - 7 = 0$.

(Αν αρχικά είχαμε υποθέσει για τις διαμέσους ότι

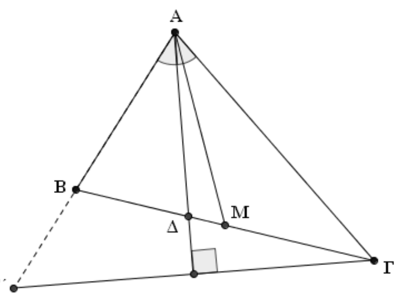
ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄ Ε.Μ.Ε.

ΓΕ: x – 2y + 1 = 0 και ΒΔ: y – 1 = 0 τα σημεία θα ήταν: Γ(–3, –1), Β(5,1) και οι εξισώσεις των πλευρών ΑΓ: $x-y+2=0$, *ΒΓ:* $x-4y-1=0$ *και ΑΒ:* $x+2y-7=0$*).*

ΑΣΚΗΣΗ 2η

Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ αν είναι γνωστή η κορυφή του Γ(8,–2) και οι εξισώσεις της διχοτόμου του ΑΔ: 3x+y – 12 = 0 και της διαμέσου του ΑΜ: 11x + 6y – 58 = 0

ΛΥΣΗ



Έστω το τρίγωνό μας ΑΒΓ. *Για την κορυφή Α τα πράγματα είναι εύκολα!* Λύνουμε το σύστημα των εξισώσεων του ΑΜ και ΑΔ και την προσδιορίζουμε:

$$\left\{\begin{matrix} 3x+y-12=0 \\ 11x+6y-58=0 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \ldots \ A(2, 6)$$

ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ!:

Θεωρούμε το συμμετρικό του Γ ως προς την διχοτόμο ΑΔ. Το σημείο αυτό Γ΄ θα είναι σημείο της ΑΒ (γιατί;) Το Γ΄ προσδιορίζεται κατά τα γνωστά (βλέπε εφαρμογή 2 σελ. 63, σχολικού βιβλίου)…. Γ΄(2, - 4)

Έτσι, μέχρι στιγμής μπορούμε να βρούμε τις εξισώσεις των πλευρών ΑΓ (από τα Α, Γ) και της ΑΒ (από τα Α, Γ΄). Πράγματι:

…. ΑΓ: 4x +3y – 26 = 0 …. ΑΒ: x = 2

(Συγνώμη, αλλά υποθέτουμε ότι ξέρετε να βρίσκετε την εξίσωση ευθείας όταν γνωρίζετε δύο σημεία τους.)

Στην συνέχεια εργαζόμαστε όπως στην προηγούμενη άσκηση:

Έστω Β(x_2, y_2). Το Β ανήκει στην ΑΒ, άρα x_2 = 2 (1). Επίσης, αν μέσο Μ της ΒΓ τότε θα είναι $M\left(\frac{x_2+8}{2}, \frac{y_2+(-2)}{2}\right)$ και επειδή ανήκει στην ΑΜ επαληθεύει την εξίσωσή της. Άρα:

$$11\cdot\frac{x_2+8}{2}+6\cdot\frac{y_2-2}{2}-58=0 \ (2)$$

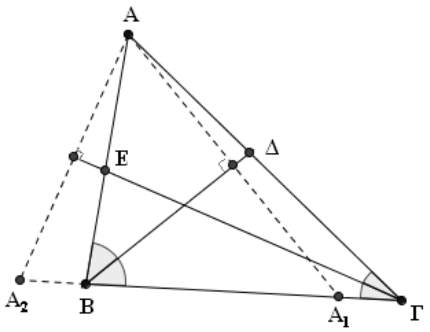
Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) έχουμε:

$x_2 = 2$, $y_2 = 3$, άρα Β(2, 3)

Από τα σημεία Β και Γ προσδιορίζουμε την εξίσωση της ΒΓ: 5x + 6y – 28 = 0.

ΑΣΚΗΣΗ 3η

Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ αν είναι Α(4, -1) και x–y–1 = 0, x – 1 = 0 οι εξισώσεις των διχοτόμων δύο γωνιών του (εσωτερικές ή εξωτερικές).



ΛΥΣΗ

Έστω ΑΒΓ το τρίγωνό μας. Επειδή το Α δεν επαληθεύει τις εξισώσεις τους, οι διχοτόμοι που δίνονται είναι των γωνιών Β και Γ. *(Στο σχήμα έχουμε υποθέσει ότι οι διχοτόμοι είναι εσωτερικές, ομοίως αν ήταν εξωτερικές)*

Έστω: ΒΔ: x – y – 1 = 0 και ΓΕ: x – 1 = 0

☒ Υπολογίζουμε κατά τα γνωστά το συμμετρικό του Α ως προς την ΒΔ: x – y – 1 = 0 ….. $A_1(0,3)$

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄ Ε.Μ.Ε.

☒ Υπολογίζουμε επίσης το συμμετρικό του Α ως προς την ΓΕ: x – 1 = 0….. $A_2(-2,-1)$.

Από τα A_1, A_2 βρίσκουμε την εξίσωση της

$$B\Gamma: 2x - y + 3 = 0$$

! Τώρα τα πράγματα είναι εύκολα:

Λύνοντας το σύστημα $\begin{Bmatrix} B\Delta: & x - y - 1 = 0 \\ B\Gamma: & 2x - y + 3 = 0 \end{Bmatrix}$

προσδιορίζουμε το Β(– 4, – 5) και το σύστημα

$\begin{Bmatrix} \Gamma E: & x - 1 = 0 \\ B\Gamma: & 2x - y + 3 = 0 \end{Bmatrix}$

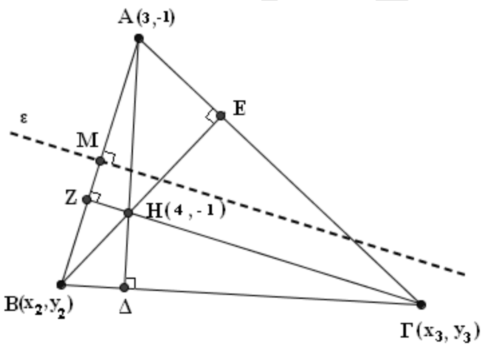
προσδιορίζουμε το Γ(1, 5)

Από τα σημεία Α και Β προσδιορίζουμε την εξίσωση της … $AB: 2x + y - 7 = 0$ και από τα Α και Γ προσδιορίζουμε την εξίσωση της … $A\Gamma: x - 2y - 6 = 0$.

ΑΣΚΗΣΗ 4η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με Α(3,-1) και ορθόκεντρο Η(4,-1). Η εξίσωση της μεσοκαθέτου της πλευράς ΑΒ είναι: x+4y=16. Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου.

ΛΥΣΗ



Αν ε η μεσοκάθετος της ΑΒ έχουμε:

$$\lambda_\varepsilon \cdot \lambda_{AB} = -1 \Leftrightarrow \lambda_\varepsilon = 4.$$

Άρα η εξίσωση της ΑΒ είναι:

$$y + 1 = 4(x - 3) \Leftrightarrow 4x - y - 13 = 0$$

Αφού το Β ανήκει στην ΑΒ θα ισχύει:;

$$4x_2 - y_2 - 13 = 0 \ (1).$$

Όμως το Μ είναι μέσο της ΑΒ οπότε $M\left(\dfrac{3 + x_2}{2}, \dfrac{y_2 - 1}{2}\right)$ και αφού ανήκει στην ε, θα ισχύει: $\dfrac{3 + x_2}{2} + 4 \cdot \dfrac{y_2 - 1}{2} - 16 = 0$ (2)

Από την λύση του συστήματος των (1) και (2) προκύπτει ότι $x_2 = 5$ και $y_2 = 7$, άρα Β(5,7)

Άρα ΒΕ: y + 1 = $\dfrac{7+1}{5-4}$(x – 4) ⇔ 8x – y – 33 = 0

Επίσης, $\lambda_{A\Gamma} = -\dfrac{1}{8}$ αφού ΑΓ ⊥ ΒΕ και

ΑΓ: y + 1 = =$-\dfrac{1}{8}$(x – 3) ⇔ x + 8y + 5 = 0

ΑΔ: y + 1 = 0·(x – 3) ⇔ y = – 1

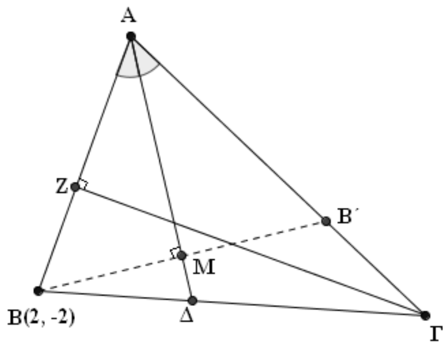
Αφού ΑΔ ⊥ ΒΓ και ΑΔ: y = – 1, η ΒΓ έχει εξίσωση:

x = 5.

ΑΣΚΗΣΗ 5η

Να βρεθούν οι εξισώσεις των πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, αν είναι Β(2, -2) και x – 3y + 2 = 0, x + y + 2 = 0 οι εξισώσεις μιας εσωτερικής διχοτόμου του και ενός ύψους του αντιστοίχως, που άγονται από διαφορετική κορυφή.

ΛΥΣΗ



Επειδή οι συντεταγμένες του σημείου Β δεν επαληθεύουν τις παραπάνω εξισώσεις η διχοτόμος και το ύψος που δίνονται δεν είναι από την κορυφή Β.

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄ Ε.Μ.Ε.

Έστω η (εσωτερική) διχοτόμος

ΑΔ: $x - 3y + 2 = 0$ και το ύψος ΓΖ: $x + y + 2 = 0$ του τριγώνου ΑΒΓ. Είναι ΓΖ⊥ΑΒ, άρα:

$\lambda_{ΓΖ} \cdot \lambda_{ΑΒ} = -1 \Leftrightarrow -1 \cdot \lambda_{ΑΒ} = -1 \Leftrightarrow \lambda_{ΑΒ} = 1$

Άρα η εξίσωση της ΑΒ είναι:

$$y + 2 = x - 2 \Leftrightarrow x - y - 4 = 0.$$

Οι συντεταγμένες του σημείου Α θα είναι η λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών ΑΒ και ΑΔ:

$$\left\{\begin{array}{l} x - y - 4 = 0 \\ x - 3y + 2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 7 \\ y = 3 \end{array}\right\} \text{ άρα } Α(7,3)$$

Στη συνέχεια εργαζόμαστε κατά τα γνωστά για να βρούμε το συμμετρικό σημείο Β΄ του Β ως προς την διχοτόμο ΑΔ οπότε Β΄(0, 4).

Επειδή Β΄ είναι σημείο της ΑΓ (γιατί;) η εξίσωση της ΑΓ θα είναι η εξίσωση της ΑΒ΄. Έτσι:

$$ΑΓ: y - 4 = \frac{4-3}{0-7}(x - 0) \Leftrightarrow x + 7y - 28 .$$

Λύνοντας το σύστημα των εξισώσεων των ευθειών ΑΓ και ΓΖ προσδιορίζουμε το σημείο

$$Γ: \left\{\begin{array}{c} x + 7y - 28 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{c} x = -7 \\ y = 5 \end{array}\right\} \text{ άρα } Γ(-7,5).$$

Τέλος από τα σημεία Β και Γ προσδιορίζουμε την εξίσωση της ΒΓ:

$$y + 2 = \frac{5+2}{7-9}(x - 2) \Leftrightarrow 7x + 9y + 4 = 0.$$

(Αντίστοιχα αποτελέσματα θα έχουμε αν υποθέσουμε ότι η διχοτόμος είναι ΑΔ: $x + y + 2 = 0$ και το ύψος ΓΖ: $x - 3y + 2 = 0$)

ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄ Ε.Μ.Ε.